

### 5.1. Rechenregeln für Ableitungen

Argumentieren Sie, warum die folgenden Funktionen differenzierbar sind, und bestimmen Sie ihre Ableitungen:

- (a)  $\log(\sin(x))$  für  $x \in (0, \pi)$ ,
- (b)  $a^x$  für  $x \in \mathbb{R}$  und ein  $a \in (0, \infty)$ ,
- (c)  $x^x$  für  $x \in (0, \infty)$ ,
- (d)  $9x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11}$  für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,
- (e)  $\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}$  für  $x \in (4, \infty)$ ,

### 5.2. Potenzen der Betragsfunktion

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > -1$ . Betrachten Sie die Funktion

$$f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|^{\alpha+1}.$$

Bestimmen Sie, für welche  $\alpha$  die Ableitung von  $f_\alpha$  an der Stelle 0 existiert.

### 5.3. Abschätzungen aus Ableitungen

Es seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige und differenzierbare Funktionen mit  $f(a) \geq g(a)$ , sowie  $f'(x) \geq g'(x)$  für alle  $x \in (a, b)$ .

- (a) Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$f(x) \geq g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Falls sogar  $f'(x) > g'(x)$  für alle  $x \in (a, b)$ , so zeigen Sie ferner:

$$f(x) > g(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

**Hinweis:** Benutzen Sie den Mittelwertsatz.

- (b) Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichung gilt:

$$1 - \frac{1}{x} < \log(x) < x - 1, \quad \forall x > 1.$$