2.1. Komplexe Zahlen I

Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $|zw| = |z||w|$

(b) $\bar{\bar{z}} = z$

(c) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$

Hinweis*: Verwenden Sie für c) die Eigenschaft $|z|^2 = z\overline{z} = \overline{z}z$ für alle komplexen Zahlen z.*

Lösung. Sei $z = a + ib, w = c + di$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Wir erhalten direkt:

$$|zw|^2 = \overline{zw}zw = \bar{z}\bar{w}zw = \overline{z}z\overline{w}w = |z|^2|w|^2$$

Nimmt man die Wurzel auf beiden Seiten, so folgt wegen der Nicht-Negativität von $|zw|$ und $|z||w|$ das gewünschte Resultat.

Alternativ gilt:

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Daher folgern wir per Definition:

$$\begin{aligned}
|zw| &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + b^2c^2} \\
&= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} = |z||w|
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\bar{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z.$$

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 + |z - w|^2 &= \overline{z + w}(z + w) + \overline{z - w}(z - w) \\
&= \overline{z}z + \overline{z}w + \overline{w}z + \overline{w}w + \overline{z}z - \overline{z}w - \overline{w}z + \overline{w}w \\
&= 2\overline{z}z + 2\overline{w}w \\
&= 2|z|^2 + 2|w|^2,
\end{aligned}$$

was das gewünschte Resultat ist.

2.2. Komplexe Zahlen II

Bestimmen Sie jeweils eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, geschrieben in Standartform $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, welche die folgende Identität erfüllt.

(a) $z^2 = -i$

(b) $\bar{z} = \frac{1}{z}$

(c) $z^2 - 2z + 5 = 0$

Lösung.

(a) Wir verwenden die Polarform, also schreiben $z = re^{i\phi}$ für $r \in (0, \infty), \phi \in [0, 2\pi)$. Dann gilt $z^2 = r^2 e^{i2\phi}$. Wir können auch $-i$ in Polarform schreiben, nämlich $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Also muss gelten

$$z^2 = r^2 e^{i2\phi} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$$

Eine mögliche Lösung ist also $r = 1$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Es handelt sich um die komplexe Zahl

$$z = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Die andere Lösung ist das Negative davon, also $\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Alternativ könnte man auch $z = x+iy$ schreiben und die Gleichungen $x^2-y^2 = 0$, $2xy = -1$ lösen, die aus der Berechnung

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = -i$$

resultieren.

(b) Die Gleichung ist äquivalent zu $z\bar{z} = 1$, also

$$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 = 1.$$

Diese Gleichung wird von allen komplexen Zahlen der Form

$$z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

erfüllt, wobei $\theta \in [0, 2\pi)$.

(c) Wir verwenden die Formel für quadratische Gleichungen:

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i,$$

wobei das Zeichen $\pm$ bedeutet, dass die zwei Lösungen durch eine Wahl von plus oder minus erhalten werden.

2.3. Nullstellen

Betrachten Sie das folgende Polynom in $\mathbb{C}$

$$P(z) = z^3 - z^2 + z + a,$$

wobei $a \in \mathbb{C}$ ein Parameter ist. Finden Sie $a \in \mathbb{C}$, sodass $-i$ eine Nullstelle von $P(z)$ ist. Faktorisieren Sie für diese Wahl von a das Polynom $P(z)$, also schreiben Sie

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

wobei z_1, z_2, z_3 die Nullstellen von $P(z)$ sind.

Lösung. Damit $-i$ eine Nullstelle ist, muss gelten $P(-i) = 0$. Wir berechnen:

$$P(-i) = (-i)^3 - (-i)^2 - i + a = i - (-1) - i + a = 1 + a$$

Es muss also $a = -1$ gelten.

Für dieses a schreiben wir:

$$P(z) = z^3 - z^2 + z - 1 = z^2(z-1) + z - 1 = (z^2+1)(z-1) = (z+i)(z-i)(z-1).$$

Wir sehen also, dass $P(z)$ die Nullstellen $-i$, i und 1 hat.

2.4. Manipulation von Summen und Produkten

Zeigen Sie *ohne* Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0,$$

(b)

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0}, \qquad (\text{wobei } a_k \neq 0 \text{ für } k = 0, \dots, n).$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{1+n},$$

Hinweis: Verwenden Sie die Teilaufgabe (a)

(d)

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)=2-\frac{1}{n+1}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Teilaufgabe (b).

Lösung.

(a) Aufgrund der Endlichkeit der Summe dürfen wir die Terme beliebig neu ordnen und berechnen daher

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_{k-1}=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{n-1}a_k\\ &= \Big(\sum_{k=0}^{n-1}a_k+a_n\Big)-\Big(a_0+\sum_{k=1}^{n-1}a_k\Big)=a_n-a_0.\end{aligned}$$

(b) Wir können die Faktoren im endlichen Produkt beliebig umordnen. Es gilt:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{\prod_{k=1}^{n}a_k}{\prod_{k=1}^{n}a_{k-1}}=\frac{\prod_{k=1}^{n}a_k}{\prod_{k=0}^{n-1}a_k}=\frac{a_n\cdot\prod_{k=0}^{n-1}a_k}{a_0\cdot\prod_{k=0}^{n-1}a_k}=\frac{a_n}{a_0}.$$

(c) Es gilt

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Setzen wir $a_k=\frac{1}{k+1}$, dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=-\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1}).$$

Unter Verwendung von

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0.$$

folgern wir also

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

(d) Es gilt

$$1 + \frac{1}{n+k} = \frac{n+k+1}{n+k}$$

Setzten wir $a_k = n + k + 1$, dann erhalten wir unter Verwendung von b):

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{n+k+1}{n+k} = \frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}.$$