3.1. Konvergenz

Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten und gegebenenfalls den Grenzwert der folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(a) $a_n = \frac{n^3-\sqrt{n}^5}{n^2+1} + (-1)^n 10^{27}$

(b) $a_n = \frac{n^3+n^2}{n^2+1} - \frac{n^3-n^2}{n^2+1}$

(c) $a_n = \frac{n^{97}-n^{44}}{n^5-n^2+2^n}$

Lösung.

(a) Der zweite Summand beschränkt ist (wenn auch sehr gross). Der erste Summand hat im Zähler ein Polynom vom Grad 3, während der Nenner bloss ein Polynom vom Grad 2 ist. Es folgt, dass die Folge divergiert. Wir können sogar eine präzisere Aussage machen, nämlich divergiert die Folge gegen $+\infty$. Um das rigoros zu zeigen, bemerken wir, dass

$$n^3 - \sqrt{n}^5 = n^3(1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}}) \geq \tfrac{1}{2}n^3, \quad \forall n \geq 4,$$
$$n^2 + 1 \leq 2n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$

$$a_n = \frac{n^3 - \sqrt{n}^5}{n^2+1} + (-1)^n 10^{27} \geq \frac{\frac{1}{2}n^3}{2n^2} + (-1)^n 10^{27} \geq \tfrac{1}{4}n - 10^{27}.$$

Sei nun $C \in \mathbb{R}$ beliebig gross. Dann können wir $N \in \mathbb{N}$ wählen mit $N > 4(C + 10^{27})$ (und $N \geq 4$). Gemäss der Abschätzung oben, gilt dann $a_n > C$ für alle $n \geq N$. Da C beliebig war, folgt die Divergenz gegen $+\infty$.

(b) Wir bemerken:

$$a_n = \frac{n^3+n^2}{n^2+1} - \frac{n^3-n^2}{n^2+1} = \frac{2n^2}{n^2+1}.$$

Dank Satz 3.3.2 und dem bekannten Limes $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ folgern wir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = 2.$$

(c) Wir sehen, dass der Zähler wie n^{97} wächst, der Nenner aber exponentiell, wie 2^n, wächst. Dank dem Resultat aus der Vorlesung, siehe auch Beispiel 3.2.2 iv) im Skript, folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{97}-n^{44}}{n^5-n^2+2^n} = 0.$$

Genauer, können wir wie folgt argumentieren. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \leq n^{97} - n^{44} \leq n^{97} \quad \text{und} \quad n^5 - n^2 + 2^n \geq 2^n,$$

also

$$0 \leq \frac{n^{97} - n^{44}}{n^5 - n^2 + 2^n} \leq \frac{n^{97}}{2^n} = n^{97}(\tfrac{1}{2})^n.$$

Da $n^p q^n$ für alle Potenzen $p \in \mathbb{N}$ und alle $q \in (0,1)$ eine Nullfolge ist, ist auch a_n eine Nullfolge.

3.2. Arithmetisches Mittel

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Beweisen Sie, dass die Folge der arithmetischen Mittel

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

ebenfalls gegen a konvergiert.

Hinweis: *Die Idee ist, die Summe s_n in zwei Teile aufzuteilen:*

$$s_n - a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}(a_k - a) + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}(a_k - a).$$

Die Summe im ersten Term ist unabhängig von n und der zweite Term kann dank der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschätzt werden.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer nicht konvergierenden Folge, deren arithmetisches Mittel konvergiert.

Lösung.

(a) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir werden ein $N \in \mathbb{N}$ finden mit $|s_n - a| < \epsilon$, für alle $n \geq N$. Wir gehen dabei in zwei Schritten vor. Zuerst, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_1.$$

Betrachten wir nun s_n, dann erhalten wir für alle $n \geq N_1$:

$$\begin{aligned}
|s_n - a| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n} - a \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - a}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k - a| \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |a_k - a| + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1+1}^{n} |a_k - a| \\
&< \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |a_k - a| + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |a_k - a| + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

wobei wir bei der zweitletzten Ungleichung verwendet haben, dass die zweite Summe $n - N_1$ Terme hat, die alle kleiner $\frac{\epsilon}{2}$ sind. Diese Ungleichung gilt für alle $n \geq N_1$. Die verbleibende Summe $\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - a|$ hängt nicht mehr von n ab. Wir können nun also $N_2 \in \mathbb{N}$ gross genug wählen, mit $N_2 \geq N_1$, und

$$\frac{1}{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt für alle $n \geq N_2$,

$$|s_n - a| < \frac{1}{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} |a_k - a| + \frac{\varepsilon}{2} < \epsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, beweist dies die Konvergenz von s_n gegen a.

(b) Betrachte als Beispiel $a_n = (-1)^n$. Diese Folge ist nicht konvergent. Hingegen gilt

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Insbesondere gilt $|s_n| \leq \dfrac{1}{n}$ und folglich konvergiert s_n gegen 0.

3.3. Konvergenz von Reihen

Verwenden Sie das Quotientenkriterium oder das Wurzelkriterium, um die Konvergenz der folgenden Reihen nachzuweisen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^n}$ für alle reellen Zahlen x.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^n} x^n$ für alle reellen Zahlen x mit $|x| < 1$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ für alle reellen Zahlen x.

Lösung.

(a) Wir wenden das Wurzelkriterium an:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n x^n}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2|x|}{n} = 0,$$

somit folgt gemäss Wurzelkriterium die absolute Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Wir wenden das Quotientenkriterium an:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}} x^{n+1}}{\frac{2^n}{1+2^n} x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2x(1+2^n)}{1+2^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^{n+1}}} |x| = |x|$$

Wenn $|x| < 1$, so ergibt das Quotientenkriterium die absolute Konvergenz der Reihe. (Für $|x| > 1$ divergiert die Reihe laut Quotientenkriterium.)

(c) Eine Anwendung des Quotientenkriteriums ergibt:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{2^n}{n!} x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2x \cdot n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} |x| = 0$$

Die Reihe konvergiert also absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.