6.1. Integrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{2^x}{1+4^x}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2-2x}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int x^3 \arctan x\,dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$,

Lösung.

(a) Die Substitution $t = 2^x$ (mit $\frac{dt}{dx} = \log(2)2^x$) liefert

$$\begin{aligned}\int \frac{2^x}{1+4^x}\,dx =& \frac{1}{\log(2)}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\log(2)}\arctan(t) + C\\ =& \frac{1}{\log(2)}\arctan(2^x) + C,\end{aligned}$$

wobei die Integrationskonstante $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

(b) Wir verwenden eine Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{dx}{x^2-2x} &= \int\limits_3^4 \frac{dx}{x(x-2)} = \int\limits_3^4 \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2}\right)dx = \frac{1}{2}\Big(\log(x-2) - \log(x)\Big)\Big|_{x=3}^{x=4}\\ &= \frac{1}{2}\Big(\log(2) - \log(1) - \log(4) + \log(3)\Big) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

(c) Wir erhalten zunächst mit partieller Integration

$$\int x^3 \arctan(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 \arctan(x) - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx.$$

Den letzten Bruch vereinfachen wir mittel Polynomdivision zu

$$\frac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}$$

und erhalten somit

$$\begin{aligned}\int x^3 \arctan(x)\,dx &= \frac{1}{4}x^4 \arctan(x) - \frac{1}{4}\int \Big(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\Big)\,dx\\ &= \frac{1}{4}x^4 \arctan(x) - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\arctan(x) + C\end{aligned}$$

(d) Die Substitution $t = \sin x$ liefert

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{1-t^2}{t^4}\,dt = \int (\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2})\,dt$$
$$= -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

6.2. Tangenssubstitution

Ziel dieser Aufgabe ist die Einführung einer Substitution, welche eine Vielzahl an Integralen trigonometrischer Funktionen löst. Es sei hier stets $x \in]-\pi, \pi[$ und wir schreiben:

$$t = t(x) := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

(a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten unter Verwendung der Additionstheoreme:

$$\cos(x) = \frac{1-t(x)^2}{1+t(x)^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t(x)}{1+t(x)^2}$$

Hinweis: *Sie dürfen die folgenden trigonometrischen Identitäten verwenden (Additionstheoreme):*

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2$$
$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

(b) Beweisen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$t'(x) = \frac{1+t(x)^2}{2}$$

Beachten Sie, dass dies auch zeigt, dass $t(x)$ eine bijektive, streng monotone Funktion von $]-\pi, \pi[$ nach $\mathbb{R}$ ist.

(c) Nutzen Sie die Substitution $t = \tan(\frac{x}{2})$ um das folgende Integral zu berechnen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)}\,dx$$

Lösung.

(a) Wir berechnen:

$$1+t(x)^2 = 1+\frac{\sin(x/2)^2}{\cos(x/2)^2} = \frac{\cos(x/2)^2+\sin(x/2)^2}{\cos(x/2)^2} = \frac{1}{\cos(\frac{x}{2})^2}$$

Dies folgt aus der üblichen Identität $\sin(x)^2+\cos(x)^2=1$. Ferner sehen wir:

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\frac{\cos(x/2)^2-\sin(x/2)^2}{\cos(x/2)^2}}{\frac{1}{\cos(x/2)^2}} = \cos(x/2)^2-\sin(x/2)^2 = \cos(x),$$

wobei wir im letzten Schritt das Additionstheorem für Kosinus verwendet haben. Ganz ähnlich findet man:

$$\frac{2t}{1+t^2} = 2\cos(x/2)^2\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \sin(x),$$

unter Verwendung des Additionstheorems für Sinus.

(b) Direktes Ableiten zeigt:

$$t'(x) = \frac{1}{2}\tan'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2\right) = \frac{1+t^2}{2}$$

Man beachte, dass also $t'(x)\geq 1/2$ gilt, somit ist $t(x)$ streng monoton wachsend, also auch injektiv. Die Surjektivität lässt sich aus der Surjektivität des Tangens auf $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ folgern, oder dirket durch berechnen von $\lim_{x\to-\pi}t(x)=-\infty$ und $\lim_{x\to\pi}t(x)=\infty$.

(c) Unter Verwendung der vorherigen Teilaufgaben, und mit $t(0)=0$ und $t(\frac{\pi}{2})=1$ berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{2t(x)}{1+t(x)^2}+\frac{1-t(x)^2}{1+t(x)^2}}\frac{2}{1+t(x)^2}t'(x)\,dx \\
&= 2\int_0^1\frac{1}{2t+1-t^2}\,dt \\
&= 2\int_0^1\frac{1}{2-(t-1)^2}\,dt \\
&= \int_0^1\frac{1}{1-\frac{(t-1)^2}{2}}\,dt \\
&= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0\frac{1}{1-y^2}\sqrt{2}\,dy \\
&= \sqrt{2}\left(\operatorname{arctanh}(0)-\operatorname{arctanh}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Hier haben wir $y = \frac{t-1}{\sqrt{2}}$ verwendet in der zweiten Substitution. Alternativ kann man mittels Partialbruchzerlegung sehen:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{1-y^2}\sqrt{2}dy &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{1-y}dy + \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{1+y}dy \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\log\Big(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) - \log\Big(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\Big) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\log\Big(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\Big) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\log(3+2\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

Beide Lösungen sind korrekt (weil $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2}(\log(1+x) - \log(1-x))$).

6.3. Stammfunktionen

Bestimmen Sie die Stammfunktionen zu den folgenden Funktionen bis auf eine Konstante:

(a) $\sin(x)^2$

(b) $\sin(x)e^x$

(c) $\cos(x)e^{\sin(x)}$

(d) $\sinh(x)\cos(x)$

Hinweis: *In einigen Fällen könnte es hilfreich sein, mehrmals partiell zu integrieren.*

Lösung.

(a) Aus partieller Integration folgt

$$
\begin{aligned}
\int \sin(x)^2\,dx &= \int (-\cos(x)'\sin(x)\,dx \\
&= -\cos(x)\sin(x) + \int \cos(x)(\sin(x))'\,dx \\
&= -\cos(x)\sin(x) + \int \cos(x)^2\,dx \\
&= -\cos(x)\sin(x) + \int (1-\sin(x)^2)\,dx \\
&= -\cos(x)\sin(x) + x - \int \sin(x)^2\,dx
\end{aligned}
$$

und somit:

$$2\int \sin(x)^2\,dx = -\cos(x)\sin(x) + x + 2C,$$

daher auch:

$$\int \sin(x)^2\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{x}{2} + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

(b) Aus partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)e^x\,dx &= \int (-\cos(x))' e^x\,dx \\
&= -\cos(x)e^x + \int \cos(x)e^x dx \\
&= -\cos(x)e^x + \int (\sin(x))' e^x\,dx \\
&= -\cos(x)e^x + \sin(x)e^x - \int \sin(x)e^x\,dx
\end{aligned}$$

Löst man dies nun nach der Stammfunktion auf, so sehen wir:

$$\int \sin(x)e^x\,dx = \frac{\sin(x)-\cos(x)}{2}e^x + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

(c) Gemäss der Kettenregel ist klar, dass $e^{\sin(x)}$ eine Stammfunktion ist. Daher gilt:

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)}\,dx = e^{\sin(x)} + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

(d) Aus partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned}
\int \sinh(x)\cos(x)\,dx &= \cosh(x)\cos(x) + \int \cosh(x)\sin(x)\,dx \\
&= \cosh(x)\cos(x) + \sinh(x)\sin(x) - \int \sinh(x)\cos(x)\,dx,
\end{aligned}$$

und somit:

$$\int \sinh(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\Big(\cosh(x)\cos(x) + \sinh(x)\sin(x)\Big) + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.