2.1. Abbildungen

(a) Existieren injektive, surjektive oder bijektive Abbildungen

(i) von $\{0, 11, 111\}$ nach $\{0, 1\}$?

(ii) von $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 4x + 3 = 0\} \cup \{0, 1\}$ nach $\{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n^3 \leq 100\}$?

(iii) von $\{2k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ in das Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$?

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 + 2$. Schreiben Sie die folgenden Mengen auf:

1.) $f^{-1}(\{2\})$

2.) $f^{-1}([3, 6))$

3.) $f^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$

(c) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := 3x + 5$.

1.) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist. Schreiben Sie g^{-1} explizit auf.

2.) Berechnen Sie:

a) $g^{-1}(0)$

b) $g^{-1}(-10)$

c) $g^{-1}(\frac{3}{2})$

2.2. Bild und Urbild

Seien X und Y Mengen. Betrachten Sie eine Abbildung $f : X \to Y$. Für eine gegebene Teilmenge B von Y ist das *Urbild von B unter f* die Teilmenge $f^{-1}(B)$ von X, die durch die Formel

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

gegeben ist.

Für eine gegebene Teilmenge A von X kann man analog den Begriff des *Bilds von A unter f* definieren: sie ist die Teilmenge $f(A)$ von Y, die durch die Formel

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$$

geben ist.

Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(c) Zeigen Sie, dass $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(d) Geben Sie ein Beispiel von f, A und B, so dass $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

2.3. Supremum und Infimum, I

Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum der folgenden Mengen. Bestimmen Sie, ob das Supremum (bzw. Infimum) ein Maximum (bzw. Minimum) ist.

1.) $\{\sqrt{x}; x \in [0, \infty[\}$.

2.) $\{\frac{1}{x}; x \in]-\infty, 0[\}$.

3.) $\{\frac{x}{x+1}; x \in [2, \infty[\}$.

4.) $\{-(x-1)^2 - 4; x \in]-3, 3[\}$.

2.4. Supremum und Infimum, II

Seien A und B zwei Teilmengen von $\mathbb{R}$, dann definieren wir

$$A + B := \{a + b; a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum der Menge $A + B$ in den folgenden Fällen. Bestimmen Sie, ob das Supremum (bzw. Infimum) ein Maximum (bzw. Minimum) ist.

1.) $A = [1, 2]$, $B = [0, 1] \cup [2, 3]$.

2.) $A =]0, 1[$, $B = [-1, 0[$.

3.) $A =]0, 1[\cap \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{N}_0$.

4.) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$.

5.) $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, $B = [0, 1]$.

2.5. Cauchy-Schwarz

(a) Zeigen Sie mithilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung: $\forall a, b, c > 0$ gilt

$$(a + b + c)^2 \leq \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)(a(b+c) + b(a+c) + c(a+b))$$

(b) Zeigen Sie, dass $\forall a, b, c > 0$ gilt

$$ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$$

(*Hinweis: zeigen Sie zunächst, dass* $2ab \leq a^2 + b^2$)

(c) Benutzen Sie *a*) und *b*) um zu zeigen, dass $\forall a, b, c > 0$ gilt

$$\frac{3}{2} \leq \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)$$

2.6. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Die Ungleichung $||x-2|-1|<3$ für reelle Zahlen x ist äquivalent zu

(i) $x<3$

(ii) $|x|<3$

(iii) $0<x<2$

(iv) $-2<x<6$

(v) $-3<x<6$

(b) Seien X, Y Mengen, $f: X \to Y$ und $g: Y \to X$ Abbildungen, so dass gilt:

$$g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

(i) f ist injektiv,

(ii) f ist surjektiv,

(iii) g ist injektiv,

(iv) g ist surjektiv,

(v) $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(c) Eine reelle Funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = h(x)$$

gilt, und sie heisst *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = -h(x)$$

gilt. Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion und sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) fg ist gerade.

(ii) fg ist ungerade.

(iii) fg^2 ist gerade.

(iv) $f + g$ ist gerade.

(d) Die Umkehrfunktion (Inverse) von $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) := x^4$ ist

(i) $x^{\frac{1}{4}}$.

(ii) existiert nicht.

(iii) $\frac{1}{4}x$.

(iv) x^{-4}.

(v) $-x^4$.

(e) Seien A und B zwei Teilmengen von $\mathbb{R}$. Was ist die Negation der folgenden Aussage?

$$\forall a \in A, \exists b \in B, \text{ so dass } a \leq b$$

(i) $\forall a \in A, \forall b \in B \; a \leq b$.

(ii) $\forall a \in A \; \exists b \in B$ so dass $a > b$.

(iii) $\exists b \in B$ so dass $\forall a \in A \; a \leq b$.

(iv) $\exists a \in A$ so dass $\forall b \in B \; a > b$.

(v) $\exists a \in A, \; \exists b \in B$ so dass $a > b$.