3.1. Komplexe Zahlen

Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Standardform, d.h. in die Form $a+bi$ mit a,b reell:

(a) $(3+2i)(6-5i)$

(b) $\frac{1}{1+i}$

(c) $\frac{3+4i}{2-i}$

(d) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

(e) $\overline{(1+i)^2} + (1+i)^2$

(f) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

(g) $(1+i)^6$ (*Hinweis*: Polarform verwenden)

3.2. Punktmengen in $\mathbb{C}$

Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen ohne Computer oder andere technische Hilfsmittel:

(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-i| < 2\}$

(b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z+1|\}$

3.3. Polynome in $\mathbb{C}$

Seien $a,b,c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Betrachten wir das Polynom

$$P(z) := az^2 + bz + c$$

für $z \in \mathbb{C}$. Sei $\sqrt{b^2-4ac}$ eine der Quadratwurzeln von b^2-4ac (zur Erinnerung: falls $b^2-4ac \neq 0$ hat b^2-4ac genau zwei unterschiedliche Quadratwurzeln q_1 und q_2 in $\mathbb{C}$ und es gilt $q_1 = -q_2$).
Seien

$$\alpha_+ := \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \alpha_- := \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $P(\alpha_+) = 0$ und $P(\alpha_-) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $P(z) = a(z - \alpha_+)(z - \alpha_-)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Schliessen Sie daraus, dass α_+ und α_- die einzigen Nullstellen von P sind. (Bemerken Sie, dass möglicherweise $\alpha_+ = \alpha_-$, nämlich wenn $b^2 - 4ac = 0$.)

(c) Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Polynomen:

a) $z^2 + 6z + 10$

b) $4z^2 + (4i)z - 1$

c) $(z^2 + 1)(z - 3i)^2$

3.4. Binomischer Lehrsatz

In dieser Übung werden wir den binomischen Lehrsatz beweisen, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion.

(a) Bemerken Sie zunächst, dass der Lehrsatz im Fall $n = 1$ wahr ist.

Nehmen wir nun an, dass der Lehrsatz für $n = N \in \mathbb{N}$ wahr ist. Wir werden zeigen, dass der Lehrsatz auch für $n = N + 1$ wahr ist.

(b) Anhand der Induktionsannahme zeigen Sie, dass

$$(x+y)^{N+1} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N-k} y^{k+1}.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N-k} y^{k+1} = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k-1} x^{N+1-k} y^k + \binom{N}{N} y^{N+1}$$

(d) Schliessen Sie, dass

$$(x+y)^{N+1} = \binom{N}{0} x^{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \left[\binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} \right] x^{N+1-k} y^k + \binom{N}{N} y^{N+1}$$

(e) Benutzen Sie die Pascal-Identität[1]

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{0, 1, ..., n\}$$

und die obige Teilaufgaben, um den Beweis des binomischen Lehrsatzes abzuschliessen.

3.5. Supremum und Infimum Es sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge und wir definieren:

$$-A := \Big\{ -a \;\Big|\; a \in A \Big\}$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \inf(-A) = -\sup A$$

[1]Sie finden einen Beweis der Pascal-Itentität auf der Wikipedia-Seite "Binomialkoeffizient".

3.6. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wie viele verschiedene Nullstellen hat das folgende Polynom?

$$P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad P(z) = z \cdot \left(z^2 + 1\right)^2 - z^2 - z^5$$

(i) 0

(ii) 1

(iii) 3

(iv) 5

(b) Bestimmen Sie das Maximum der Menge A definiert wie folgt:

$$A := \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup]2, 4[$$

(i) Existiert nicht.

(ii) 1

(iii) 4

(iv) $+\infty$

(c) Was für eine geometrische Form hat die folgende Menge:

$$M := \left\{ c \in \mathbb{C} \;\middle|\; |c - 1| = 2 \right\}?$$

(i) Ein Quadrat mit den Eckpunkten $(-1, -2), (-1, 2), (3, -2)$ und $(3, 2)$

(ii) Ein Geradenabschnitt vom Punkt $(-1, 0)$ zu $(3, 0)$

(iii) Ein Kreis mit Mittelpunkt i und Radius 2

(iv) Ein Kreis mit Mittelpunkt 1 und Radius 2