4.1. Wurzel in $\mathbb{C}$

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass jede komplexe Zahl eine komplexe Wurzel besitzt, ohne dabei die Polarform zu verwenden.

Es seien also $z = a + bi, w = c + di$ komplexe Zahlen mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Beweisen Sie, dass:
$$z^2 = w,$$
äquivalent ist zu folgenden Gleichungen:
$$a^2 - b^2 = c, \quad 2ab = d.$$

(b) Zeigen Sie, dass wenn $z^2 = w$, dann gilt $|w| = a^2 + b^2$.

(c) Wenn $z^2 = w$, beweisen Sie, dass a und b die folgenden Gleichungen erfüllen:
$$a^2 = \frac{1}{2}(|w| + c), \quad b^2 = \frac{1}{2}(|w| - c). \tag{1}$$

(d) Beweisen Sie, dass reelle Zahlen a, b existieren, sodass (1) erfüllt ist.

Hinweis: Erinnern Sie sich, dass jede nicht-negative Zahl eine Wurzel hat.

(e) Wenn a, b die Gleichungen (1) erfüllen, zeigen Sie, dass auch $a^2 - b^2 = c$ sowie $(2ab)^2 = d^2$ gelten.

(f) Folgern Sie, durch geschickte Wahl der Vorzeichen von a, b, dass zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl z existiert, sodass $z^2 = w$.

4.2. Produkt von Folgen

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist (d.h. $\exists C > 0$ so dass $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq C$).
Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

4.3. Grenzwerte

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n+3}{n^2+2}$,

(b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-n^2+3}{2^n n^2+5}$,

(c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$,

(d) $\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{\sin(n)}{2^n} + \frac{\cos(n)}{n^4}\right)$.

Hinweis: *Für d) benützen Sie Aufgabe (Produkt von Folgen)*

4.4. Wurzelberechnung

Es sei $c \geq 1$ eine reelle Zahl. Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die folgende Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} a_1 &= c, \\ \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \end{aligned}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{c}$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass gilt:
$$1 \leq a_n \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n folgende Ungleichung gilt:
$$a_n^2 \geq c$$

(c) Zeigen Sie, dass die Folge monoton fallend ist, d.h. für alle natürlichen Zahlen n gilt:
$$a_n \geq a_{n+1}$$

(d) Argumentieren Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und der Grenzwert a die folgende Gleichung erfüllt:
$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right).$$
Folgern Sie, dass $a^2 = c$.

(e) Für $c = 3$, berechnen Sie (mit dem Taschenrechner/Computer) a_2, a_3, a_4 und a_5. Wieviele Stellen nach dem Komma stimmen bei a_5 bereits mit $\sqrt{3}$ überein?

4.5. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{16n^3 + 100n + 1000000}{27n^3 + 10920n + 2020}$$

(i) Divergiert, d.h. keine Konvergenz

(ii) Konvergiert, mit Grenzwert 0

(iii) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{16}{27}$

(iv) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{4}{9}$

(v) Konvergiert, mit Grenzwert 1000000

(b) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{n^2}{2^n n^2 + 8}$$

(i) Divergiert, d.h. keine Konvergenz

(ii) Konvergiert, mit Grenzwert 0

(iii) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{2}$

(iv) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{4}$

(v) Konvergiert, mit Grenzwert 1

(c) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{n^3 + 22n^2 - 10}{29n^2 - 27n + 8}$$

(i) Divergiert, d.h. keine Konvergenz

(ii) Konvergiert, mit Grenzwert 0

(iii) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{29}$

(iv) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{22}{29}$

(v) Konvergiert, mit Grenzwert 29