6.1. Alternierende Reihen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende, reelle Nullfolge, d.h.

$$a_{n+1} \leq a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ sei

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n.$$

(a) Zeigen Sie zunächst, dass $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist.

(d) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$S_{2n+1} \leq S_k \leq S_{2n}, \quad \forall k \geq 2n+1.$$

(e) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ und $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$ existieren.

(f) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$$

(g) Schliessen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert.

6.2. Konvergenz von Reihen

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

Hinweis*: Benutzen Sie für (c) die Aufgabe 6.1*

6.3. Eulersche Zahl I

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge gegeben durch

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, und dass $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_n \geq 2$.

Hinweis: *Sie dürfen die Bernoullische Ungleichung benutzen:* $(1+x)^n \geq 1+nx$ $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1$ und $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge gegeben durch

$$b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, und dass $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \leq 4$.

Hinweis: *Benutzen Sie wieder die Bernoullische Ungleichung, wie auch die Ungleichung* $\frac{n}{n^2-1} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Bemerken Sie, dass $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und schliessen Sie aus den obigen Teilaufgaben, dass $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$ existieren, und dass $a \leq b$.

(d) Zeigen Sie, dass $a = b$.

Hinweis: *Benutzen Sie die Abschätzung:* $0 \leq b - a \leq b_n - a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Der Limes $e := a = b$ heisst Eulersche Zahl.

6.4. Exponentialfunktion I

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ sei

$$Exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Aus Beispiel 3.7.2 i) folgt, dass die Reihe absolut konvergiert.
Seien $x, y \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$Exp(x) \cdot Exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} \right).$$

Hinweis: *Sie dürfen Satz 3.8.2 benutzen.*

(b) Benutzen Sie Teilaufgabe a) und den binomischen Lehrsatz um zu schliessen, dass

$$Exp(x) \cdot Exp(y) = Exp(x+y).$$

6.5. Quotientenkriterium

Bestimmen Sie mithilfe des Quotientenkriteriums ob die folgenden Reihen konvergieren oder nicht:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{1-2n}}{n^2+1}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1+3n}(n+1)}{n^2 3^n}$$

6.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei a_n definiert durch

$$a_n = \begin{cases} 1 + \sqrt{\frac{k}{12k+1}} & n = 3k+1 \text{ für } k \geq 0, \\ \frac{5k^3+k}{k^3+1} & n = 3k+2 \text{ für } k \geq 0, \\ \frac{(-1)^k}{k} & n = 3k+3 \text{ für } k \geq 0. \end{cases}$$

Welche der Aussagen gilt?

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert.

(ii) $\liminf_{n\to\infty} a_n$ existiert.

(iii) $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 + \sqrt{1/12}$

(b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $b_n = \sup_{k\geq n} a_n$, monoton fallend und die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $c_n = \inf_{k\geq n} a_n$, monoton wachsend.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(c) Die Harmonische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ ist

(i) Konvergent

(ii) Divergent