7.1. Eulersche Zahl II

Erinnern Sie sich, dass

$$Exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

für $z \in \mathbb{C}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, ..., n\}$ sei

$$a_k^{(n)} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{n^k}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $0 \leq a_k^{(n)} \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, ..., n\}$, und dass für fixes $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a_k^{(n)}.$$

Schliessen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq Exp(1).$$

Hinweis: *Benutzen Sie den binomischen Lehrsatz.*

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie: $\exists\, n_\varepsilon^0, n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$, mit $n_\varepsilon^0 \leq n_\varepsilon^1$, sodass $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon^0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} > Exp(1) - \varepsilon,$$

und $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon^1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0} (1 - a_k^{(n)}) \leq \varepsilon.$$

(d) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon^1$

$$\left| Exp(1) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right| < 2\varepsilon.$$

(e) Schliessen Sie, dass
$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = Exp(1).$$

7.2. Exponentialfunktion II

(a) Zeigen Sie, dass $Exp(n) = e^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: *Benutzen Sie Aufgabe 7.1 und 6.4. Betrachten Sie zunächst die Fälle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $n = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $Exp(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Hinweis: *Zeigen Sie zunächst, dass*
$$Exp\left(\frac{p}{q}\right) = \left(Exp\left(\frac{1}{q}\right)^p\right)$$
$\forall p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.

7.3. Zeta-Funktion Für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 0$, betrachten wir die folgende Reihe:
$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$
Dies definiert die berühmte *Riemannsche Zeta Funktion*.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe für $s \leq 1$ divergent ist.

Hinweis: *Vergleichen Sie die Reihe in* $\zeta(s)$ *mit der harmonischen Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

(b) Sei nun $s > 1$. Betrachten Sie für $N \in \mathbb{N}$ die partiellen Summen
$$\sum_{n=1}^{2^N-1}\frac{1}{n^s}$$
. Zerlegen Sie diese partielle Summe wie folgt:
$$\sum_{n=1}^{2^N-1}\frac{1}{n^s} = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{1}{n^s}\right).$$
Zeigen Sie, dass
$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{1}{n^s} \leq 2^{(1-s)k}.$$

(c) Schliessen Sie, dass die Reihe $\zeta(s)$ für $s > 1$ konvergent ist.

7.4. Stückweise stetige Funktionen

Es seien $f_1 : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ und $f_2 :]-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen. Wir definieren dann eine weitere Funktion f wie folgt:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f(x) := \begin{cases} f_1(x), & \text{wenn } x \geq 0 \\ f_2(x), & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass falls $f_1(0) \neq f_2(0)$, dann ist f unstetig.

(b) Zeigen Sie, dass wenn $f_1(0) = f_2(0)$, dann ist f stetig.

(c) Wir betrachten die Funktion:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) := \begin{cases} x^2 + 3, & \text{wenn } x < 0 \\ cx + d, & \text{wenn } 0 \leq x < 1 \\ x^3 - x + 4, & \text{wenn } 1 \leq x \end{cases}$$

Wie müssen $c, d \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit f stetig ist?

7.5. Stetige Funktionen

Bestimmen Sie, ob die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig sind

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-4x}{x-2} & \text{wenn } x \neq 2 \\ 8 & \text{wenn } x = 2, \end{cases}$

(b) $f(x) = \frac{1}{e^x - 2}$,

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \leq 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x > 0. \end{cases}$

Hinweis: *Sie dürfen ohne Beweis die Tatsache benützen, dass die Sinusfunktion stetig ist.*

7.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$ ist stetig.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(b) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Jede stetige, surjektive Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$ ist monoton.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(c) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Es existiert eine surjektive stetige Funktion $f : [a, b] \to]c, d[$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(d) Ist die folgende Funktion stetig?

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ f(x) := \begin{cases} -x & \text{wenn } x < 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ x & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$$

(i) Ja

(ii) Nein