8.1. Streng monoton wachsende stetige Funktionen

Man definiert den Sinus hyperbolicus als

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(Exp(x) - Exp(-x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(a) Zeigen Sie, dass sinh stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass sinh streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$.

(d) Schliessen Sie, dass sinh bijektiv ist, und dass $\sinh^{-1}$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

Die Funktion $\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *Areasinus hyperbolicus*, und wird als arsinh geschrieben.

8.2. Summe und Produkt von gleichmässig stetigen Funktionen

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei gleichmässig stetige Funktionen.

(a) Zeigen Sie, dass $f + g$ gleichmässig stetig ist auf $\mathbb{R}$.

(b) Finden Sie ein Beispiel für gleichmässig stetige Funktion f und g auf $\mathbb{R}$, sodass $f \cdot g$ nicht gleichmässig stetig ist auf $\mathbb{R}$.

(c) Nehmen Sie nun zusätzlich an, dass f und g beschränkt sind auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $f \cdot g$ gleichmässig stetig ist auf $\mathbb{R}$.

8.3. Beschränktheit von stetigen Funktionen auf kompakten Intervallen

Es sei

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, wobei $-\infty < a < b < \infty$. Zeigen Sie, dass f beschränkt ist, also

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) < \infty, \qquad \inf_{x\in[a,b]} f(x) > -\infty,$$

Hinweis: *Laut Satz 4.7.3 im Skript ist f auf $[a, b]$ auch gleichmässig stetig. Verwenden Sie die Definition von gleichmässiger Stetigkeit, um $f(x)$ auf $[a, b]$ abzuschätzen.*

8.4. Satz vom Minimum und Maximum

In dieser Aufgabe werden Sie beweisen, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten Interval ein Maximum besitzt. Es sei also wie in der vorherigen Teilaufgabe $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig (mit $-\infty < a < b < \infty$).

(a) Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $x_n \in [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus der vorherigen Teilaufgabe eine konvergente Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt, sodass der Grenzwert

$$x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n(k)} \in [a, b],$$

ein Maximum der Funktion f auf $[a, b]$ ist, also

$$f(x_0) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Bemerkung: *Analog kann man zeigen, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten Inverval sein Minimum annimmt.*

8.5. Maximum und Minimum von Funktion

Es sei:

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{6x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Bestimmen Sie, ob die Funktion ein Maximum und/oder ein Minimum annimmt.

8.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist mit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, dann existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = 0$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(b) Welche der folgenden Funktionen besitzen eine stetige Inverse?

(i) $f : [0, \pi] \to [0, 1],\ f(x) = \sin(x)$

(ii) $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1],\ f(x) = \sin(x)$

(iii) $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],\ f(x) = \sin(x)$

(iv) $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],\ f(x) = \sin(x)$

(c) Die Funktion $f(x) = x$ ist gleichmässig stetig auf $\mathbb{R}$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(d) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem jeweils angegebenen Definitionsbereich. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) $f(x)$ ist stetig auf $(0, \infty)$.

(ii) $f(x)$ ist gleichmässig stetig auf $(0, \infty)$.

(iii) $f(x)$ ist gleichmässig stetig auf $(0, 1)$.

(iv) $f(x)$ ist gleichmässig stetig auf $(1, \infty)$.