9.1. Berechnung von Limes

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie dass

$$\lim_{x \to +\infty} x^k \ \exp(-x) = 0$$

Hinweis: *Bemerken Sie, dass* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ *und*

$$\exp(x) > \frac{x^{k+1}}{k+1!} \text{ für } x > 0$$

(b) Sei $\alpha > 0$ beliebig. Wir definieren für $x > 0$:

$$x^\alpha = \exp(\alpha \log(x)).$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log(x) = 0$$

Hinweis: *Benützen Sie die Substitution* $y = -\alpha \log(x)$ *und den Limes*

$$\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty$$

9.2. Bernoulli-de L'Hôpital

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mithilfe des Satzes von Bernoulli-de L'Hôpital

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$

(c) $\lim_{x \to \infty} \frac{\log(3x)}{x^2}$

(d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x^2 - x - 2}$

9.3. Differenzierbarkeit

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ob diese an der Stelle $x = 0$ differenzierbar sind.

(a) $f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

9.4. Umkehrsatz

Die Hyperbelfunktionen *Sinus hyperbolicus*, *Cosinus hyperbolicus* und *Tangens hyperbolicus* sind definiert auf $\mathbb{R}$ durch

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ und $\tanh(x)$ auf $\mathbb{R}$.

(b) Sei f eine der obigen Funktionen. Bestimmen Sie

$$I_f = \{x \in \mathbb{R}; f'(x) > 0\}$$

und bemerken Sie, dass für alle drei Funktionen I_f ein Intervall ist.

(c) Skizzieren Sie die Graphen der drei Hyperbelfunktionen.

(d) Benutzen Sie den Umkehrsatz um zu zeigen, dass die drei Hyperbelfunktionen auf den entsprechenden Bereichen I_f bijektiv sind.
Man schreibt die Inverse der Hyperbelfunktionen als

$$\operatorname{arcsinh} = (\sinh)^{-1}, \quad \operatorname{arccosh} = (\cosh)^{-1}, \quad \operatorname{arctanh} = (\tanh)^{-1}.$$

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche von arcsinh, arccosh und arctanh.

(e) Bestimmen Sie die Ableitungen von arcsinh, arccosh und arctanh (als Funktionen der Hyperbelfunktionen und ihren Inversen).

(f) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen arcsinh, arccosh und arctanh.

9.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

(a) Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(\cos(\sin(x)))$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(i) $f'(x) = -\cos(x)\sin(\sin(x))\cos(\cos(\sin(x)))$

(ii) $f'(x) = \cos(x)\sin(x)\cos(x)$

(iii) $f'(x) = -\cos(\sin(-\cos(x)))$

(iv) $f'(x) = -\cos(x)\cos(\sin(x))\sin(\cos(\sin(x)))$

(b) Welche der folgenden Ableitungen sind korrekt? (Mehrere Antworten können korrekt sein)

(i) $\Big(\log(2x)\Big)' = 2\log(x)\frac{1}{x}$

(ii) $\Big(\exp(\sin(x))\Big)' = \cos(x)\exp(\sin(x))$

(iii) $\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos(x)}}$

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die an jeder Stelle in $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Weiter sei $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Dann existiert ein $x \in [0,1]$ mit $f'(x) = 1$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(d) Betrachten Sie die Funktion

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x + \sin(x)}{x}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(i) Wegen Bernoulli-de L'Hôpital existiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$ nicht.

(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert wegen Bernoulli-de L'Hôpital.

(iii) Man kann Bernoulli-de L'Hôpital nicht anwenden und $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert nicht.

(iv) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert, aber man kann Bernoulli-de L'Hôpital nicht anwenden.