10.1. Gleichmässige Konvergenz

Wir betrachten die Folge von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x \leq n \\ x - n, & \text{falls} \quad n < x < n+1 \\ 1, & \text{falls} \quad n+1 \leq x \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f_n.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert gegen die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

(c) Beweisen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmässig konvergiert auf $\mathbb{R}$.

(d) Betrachten Sie die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eingeschränkt auf $[-R, R]$ für ein $R > 0$. Zeigen Sie, dass die Folge gleichmässig auf $[-R, R]$ konvergiert.

10.2. Gleichmässige Konvergenz von gleichmässig stetigen Funktionen

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von gleichmässig stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Nehmen Sie an, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass f stetig ist. Zeigen Sie, dass f sogar gleichmässig stetig ist.

10.3. Punktweise und gleichmässige Konvergenz

Betrachten Sie die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Bestimmen Sie jeweils, ob die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert, und falls ja, was der Grenzwert ist. Ist die Konvergenz auch gleichmässig?

(a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{\sin(x)}{n}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \cos(n\pi x)$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : (0, 1) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$

10.4. Gleichmässige Konvergenz und Ableitungen

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \sqrt{(1 - e^{-|x|})^2 + e^{-2n}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) = (1 - e^{-|x|})^2$ von der Klasse C^1 ist auf $\mathbb{R}$. Schliessen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 1 - e^{-|x|}$$

konvergiert.

Hinweis: *Die Abschätzung* $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$, $\forall a, b \geq 0$ könnte hilfreich sein.

(c) Konvergiert die Folge von Ableitungen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmässig auf $\mathbb{R}$?

Hinweis: *Argumentieren Sie mit dem Satz 5.4.1 im Skript.*

10.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) f ist injektiv.

(ii) f ist surjektiv.

(iii) f ist streng monoton wachsend.

(iv) f ist streng monoton fallend.

(v) Keine der obigen Antworten.

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) f ist injektiv.

(ii) f ist surjektiv.

(iii) f ist streng monoton wachsend.

(iv) f ist streng monoton fallend.

(v) Keine der obigen Antworten.

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$2 \geq f'(x) \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) f ist injektiv.

(ii) f ist surjektiv.

(iii) f ist streng monoton wachsend.

(iv) f ist streng monoton fallend.

(v) Keine der obigen Antworten.