12.1. Partielle Integration

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration:

(a) $\int_1^2 x \log(x)\, dx,$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) \cos(x)\, dx$

(c) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 4x \cos(2-3x)\, dx$

(d) $\int_0^3 (2+5x)e^{\frac{x}{3}}\, dx$

Hinweis: *Für b) dürfen Sie die folgende trigonometrische Identität benutzen*

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)).$$

12.2. Substitutionsregel

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Substitutionsregel:

(a) $\int_{-2}^2 (3x^2-9x)^4(6x-9)\, dx,$

(b) $\int_0^1 (3x-2x^3)e^{x^4-3x^2}\, dx$

(c) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)}\, dx$

12.3. Partialbruchzerlegung

Ziel dieser Aufgabe ist es, rationale Funktionen in einfachere Summanden zu zerlegen. Dies wird im Zusammenhang mit Integration ein wichtiges Hilfsmittel sein.

(a) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Bringen Sie beide Summanden auf einen gemeinsamen Nenner, dann können Sie aus der gewünschten Gleichheit **zwei** lineare Gleichungen in A, B folgern.

(b) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$.

(c) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + Cx + D,$$

wobei $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Verwenden Sie Polynomdivision mit Rest um den Grad des Zählers auf 1 zu reduzieren.

(d) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2},$$

wobei $A, B, C \in \mathbb{R}$. Vergewissern Sie sich, dass alle drei Summanden notwendig in der Zerlegung sind (d.h. $A, B, C \neq 0$).

Hinweis: Sie müssen nur eine geeignete Formulierung geben, diese aber nicht beweisen.

(e) Benutzen Sie Partialbruchzerlegungen, um die Stammfunktionen der folgenden Funktionen zu bestimmen:

- $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$
- $\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$
- $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$
- $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$

12.4. Integrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

(a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^3-x}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{4x-2}{x^2-2x-63}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x+2)^2}\,dx,$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-9)^2}\,dx,$

12.5. Variation der Konstanten

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen, indem Sie zuerst eine homogene Lösung finden und dann Variation der Konstanten anwenden.

(a) $y' - 3y = e^{5x}$,

(b) $y' - 3y = e^{3x}$,

(c) $y' - y = \sin x$,

(d) $y' - \frac{y}{x} = x$.

12.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche der folgenden Rechnungen ist keine korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(i) $\int \sin(\phi)\cos(\phi)\, d\phi = -\cos(\phi)\cos(\phi) - \int \cos(\phi)\sin(\phi)\, d\phi.$

(ii) $\int \sin(\phi)\cos(\phi)\, d\phi = \sin(\phi)\sin(\phi) - \int \cos(\phi)\sin(\phi)\, d\phi.$

(iii) $\int x\log(x)\, dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x}{2}\, dx.$

(iv) $\int 2x^2 e^{x^2}\, dx = xe^{x^2} - \int e^{x^2}\, dx.$

(v) Alle sind korrekte Anwendungen der partiellen Integration.

(b) Welche Substitution vereinfacht das folgende Integral:

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}\, dx$$

(i) $y = \sin(x)$

(ii) $y = \cos(x)$

(iii) $y = 1 + \sin(x)^2$

(iv) Keine der obigen.

(c) Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_2^3 \frac{1}{x\log(x)} dx$$

(i) $-\frac{5}{36}$

(ii) $\frac{1}{2}(\log^2(3) - \log^2(2))$

(iii) $\log\left(\frac{\log(3)}{\log(2)}\right)$

(iv) $\arctan(\log(3)) - \arctan(\log(2))$

(d) Wählen Sie die Stammfunktion zu der folgenden Funktion aus:

$$\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}$$

(i) $\arctan(\sin(x)) + c$

(ii) $\arccos(\sin(x)) + c$

(iii) $\log(\sin(x)) + c$

(iv) $\log(\tan(x)) + c$

(e) Wählen Sie die Stammfunktion zu der folgenden Funktion aus:

$$\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$$

(i) $\arctan(\sin(x)) + c$

(ii) $\arctan(1+\sin(x)) + c$

(iii) $\log(\sin(x)) + c$

(iv) $\log(1+\sin(x)) + c$