13.1. Integrale berechnen per Definition

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die folgende Treppenfunktion:

$$f_n(x) = \frac{k^2}{n^2} \quad \forall x \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad \forall k \in \{1, ..., n\}.$$

Erklären Sie, warum

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x^2.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

(c) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

und schliessen Sie daraus, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}.$$

(d) Schliessen Sie aus den obigen Teilaufgaben, dass

$$\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}.$$

(e) Berechnen Sie mittels Riemannscher Summen das Integral

$$\int_0^1 x^3 dx$$

Hinweis: *Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

13.2. Uneigentliche Integrale

Sei f Riemann-integrabel. Sei $a \in \mathbb{R}$. Falls der Grenzwert

$$\lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)dx$$

existiert, schreibt man

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)dx,$$

und dieser Grenzwert wird uneigentliches Integral genannt.

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale, oder erklären Sie, warum der entsprechende Grenzwert nicht existiert.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}dx.$

13.3. Ableiten von Parameterintegralen

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktion:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t) := \int_0^{\sin(t)} e^{-x^2}\,dx$$

Hinweis: Benutzen Sie den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung sowie die Kettenregel.

13.4. Konvergenz von Reihen via Integrale

Ziel dieser Aufgabe ist es, das Konvergenzverhalten gewisser Reihen durch Integrale zu bestimmen. Für diese Aufgabe sei:

$$f : [1,\infty) \to \mathbb{R},$$

eine monoton fallende stetige Funktion, sodass für alle $x \in [1,\infty)$ gilt:

$$f(x) \geq 0$$

(a) Wir definieren zwei Treppenfunktionen $f_1,\ f_2 : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ wie folgt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$, setzen wir auf dem Intervall $[n, n+1)$

$$f_1(x) = f(n+1), \quad f_2(x) = f(n), \quad \forall x \in [n, n+1)$$

Zeigen Sie, dass für beliebiges $R \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_1^R f_1(x)\,dx \leq \int_1^R f(x)\,dx \leq \int_1^R f_2(x)\,dx$$

(b) Sei nun $N \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die folgenden Integrale explizit:

$$\int_1^N f_1(x)\,dx, \quad \int_1^N f_2(x)\,dx$$

(c) Wir betrachten nun das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty f(x)\,dx := \lim_{R\to\infty} \int_1^R f(x)\,dx.$$

Zeigen Sie, dass dieses uneigentliche Integral genau dann konvergiert (das heisst der Grenzwert oben existiert), wenn die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

(d) Bestimmen Sie alle Exponenten $s \in \mathbb{R}$, sodass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\log(n+1)^s}$$

13.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(i)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ii)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

(iii)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

(iv) Alle Aussagen sind falsch.

(b) Sei $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(i)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ii)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

(iii)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

(iv) Alle Aussagen sind falsch.

(c) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter sei $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $g_n(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [0,1]$ und $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $h_n(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [0,1]$. Falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n(x)\,dx,$$

dann ist f Riemann-integrabel.

(i) Wahr

(ii) Flasch