1.1. Wahrheitstafeln

(a) Bestimmen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden logischen Ausdrücke:

1) $A \wedge (B \vee C)$,

2) $(\neg(A \vee B)) \wedge C$,

3) $(A \wedge (\neg B)) \vee C$,

4) $(A \wedge \neg B) \vee \neg A$.

Lösung.

1)

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$
W	W	W	W	W
W	W	F	W	W
W	F	W	W	W
W	F	F	F	F
F	W	W	W	F
F	W	F	W	F
F	F	W	W	F
F	F	F	F	F

2)

A	B	C	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg(A \vee B)) \wedge C$
W	W	W	W	F	F
W	W	F	W	F	F
W	F	W	W	F	F
W	F	F	W	F	F
F	W	W	W	F	F
F	W	F	W	F	F
F	F	W	F	W	W
F	F	F	F	W	F

3)

A	B	C	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$	$(A \wedge (\neg B)) \vee C$
W	W	W	F	F	W
W	W	F	F	F	F
W	F	W	W	W	W
W	F	F	W	W	W
F	W	W	F	F	W
F	W	F	F	F	F
F	F	W	W	F	W
F	F	F	W	F	F

4)

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A$	$(A \wedge \neg B) \vee \neg A$
W	W	F	F	F	F
W	F	W	W	F	W
F	W	F	F	W	W
F	F	W	F	W	W

(b) Zeigen Sie mithilfe einer Wahrheitstafel

1) $(A \vee B) \wedge C \iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$,
2) $(A \wedge B) \vee C \iff (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

Lösung.

A	B	C	$(A \vee B) \wedge C$	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	$(A \wedge B) \vee C$	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$
W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	F	F	W	W
W	F	W	W	W	W	W
W	F	F	F	F	F	F
F	W	W	W	W	W	W
F	W	F	F	F	F	F
F	F	W	F	F	W	W
F	F	F	F	F	F	F

(c) Bestimmen Sie mithilfe einer Wahrheitstafel, ob die Aussage

$$(\neg A \vee B) \wedge (B \to (\neg C \wedge \neg A)) \wedge (A \vee C)$$

wahr sein kann.

Lösung.

A	B	C	$(\neg A \vee B) \wedge (B \to (\neg C \wedge \neg A)) \wedge (A \vee C)$
W	W	W	F
W	W	F	F
W	F	W	F
W	F	F	F
F	W	W	F
F	W	F	F
F	F	W	W
F	F	F	F

Die Aussage kann wahr sein. Nämlich ist die Aussage genau dann wahr, wenn A falsch, B falsch und C wahr ist.

1.2. Logik

(a) Was bedeuten die folgenden Aussagen? Sind sie wahr oder falsch?

1) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : y > x$
2) $\forall x \in \mathbb{N} : (x > 10) \vee (x < 10)$
3) $\exists x \in \mathbb{R}, \nexists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (q \neq 0 \Rightarrow x = p/q)$
4) $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (c|ab) \Rightarrow (c|a) \vee (c|b)$

Bemerkung: Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $a|b$ genau dann, wenn ein $c \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $b = ac$.

(b) Schreiben Sie die folgenden Aussagen als prädikatenlogischen Ausdruck:

1) 24 ist keine Quadratzahl.
2) Keine natürliche Zahl ist grösser als alle anderen natürlichen Zahlen.

Lösung.

(a) 1) Bedeutung: *Für alle* $x \in \mathbb{N}$ *existiert ein* $y \in \mathbb{N}$, *sodass* $y > x$.
Die Aussage ist wahr, zumal $y = x + 1$ die gewünschte Ungleichung erfüllt und $x + 1 \in \mathbb{N}$.

2) Bedeutung: *Für jedes* $x \in \mathbb{N}$ *gilt entweder die Ungleichung* $x > 10$ *oder* $x < 10$.
Die Aussage ist falsch, da $x = 10$ keine der beiden Ungleichungen erfüllt.

3) Bedeutung: *Es gibt eine reelle Zahl, sodass $x \neq p/q$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q \neq 0$.* Anders gesagt: *Es gilt $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$.*
Die Aussage ist wahr, da π beispielsweise irrational ist, also nicht durch einen Bruch darstellbar.

4) Bedeutung: *Für jedes Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gilt, dass wenn c das Produkt von a und b teilt, dann teilt c entweder a oder b.*
Die Aussage ist falsch. Man betrachte z.B. $a = 2$, $b = 2$, $c = 4$. Dann gilt 4 teilt $4 = 2 \cdot 2$, aber offensichtlich teilt 4 nicht 2.

(b) 1) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \neq 24$ **oder** $\forall n \in \mathbb{Z} : n^2 \neq 24$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : m > n$ **oder** $\neg\Big(\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} : n \geq m\Big)$

Hinweis: Es gibt auch andere, korrekte Lösungen. Im Zweifelsfall wenden Sie sich an Ihren Übungsassistenten.

1.3. Negation

Formulieren Sie die Negation der folgenden Aussagen sowohl in Wort und mittels Quantoren, ohne schlicht $\neg$ anzufügen.

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : n < n+1$

(b) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} : (n = m) \vee (n + m = 0)$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{Z} : (n \neq m) \Rightarrow \big((k \neq 0) \wedge (n + k = m)\big)$

Lösung.

(a) $\exists n \in \mathbb{N} : n \geq n+1$, d.h. es existiert eine natürliche Zahl n, welche grösser ist als $n+1$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : (n \neq m) \wedge (n + m \neq 0)$, d.h. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $n \neq m$ und gleichzeitig $n + m \neq 0$.

(c) $\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z} : (n \neq m) \wedge \big((k = 0) \vee (n + k \neq m)\big)$, d.h. es gibt natürliche Zahlen n und m, sodass für alle ganzen Zahlen k gilt $n \neq m$ **und** entweder $k = 0$ oder $n + k \neq m$.

1.4. Induktion

Beweisen Sie die folgenden Formeln mittels Induktion:

(a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ für alle natürlichen Zahlen n.

(b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ für alle natürlichen Zahlen n.

(c) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \neq 1$.

(d) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung.

(a) **Verankerung:** Im Fall $n = 1$ ist die Formel trivial:

$$1^2 = 1 = \frac{1}{6} 1 \cdot 2 \cdot 3$$

Induktionsannahme: Die Formel gilt für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Betrachten wir nun die folgende Summe:

$$\begin{aligned}
1^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= (n+1)\Big(\frac{1}{6}n(2n+1) + (n+1)\Big) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\Big(n(2n+1) + 6n + 6\Big) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1),
\end{aligned}$$

wobei beim ersten Gleichheitszeichen die Induktionsannahme angewandt wurde. Somit haben wir die gewünschte Formel für $n+1$ gezeigt und die allgemeine Formel daher per Induktion bewiesen.

(b) **Verankerung:** Im Fall $n = 1$ ist die Formel trivial:

$$1^3 = 1 = \Big(\frac{1}{2}1 \cdot 2\Big)^2$$

Induktionsannahme: Die Formel gilt für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Betrachten wir nun die folgende Summe:

$$\begin{aligned}
1^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 &= \Big(\frac{1}{2}n(n+1)\Big)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2\Big(n^2 + 4(n+1)\Big) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4n + 4) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \\
&= \Big(\frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)\Big)^2,
\end{aligned}$$

wobei beim ersten Gleichheitszeichen die Induktionsannahme angewandt wurde. Somit haben wir die gewünschte Formel für $n+1$.

(c) **Verankerung:** Im Fall $n = 0$ ist die Formel schlicht die dritte binomische Formel:

$$(1+x) = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}$$

Induktionsannahme: Die Formel gilt für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Betrachten wir nun das folgende Produkt:

$$\begin{aligned}(1+x)\dots(1+x^{2^n})(1+x^{2^{n+1}}) &= \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \cdot (1+x^{2^{n+1}}) \\ &= \frac{(1-x^{2^{n+1}})(1+x^{2^{n+1}})}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{2\cdot 2^{n+1}}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{2^{(n+1)+1}}}{1-x},\end{aligned}$$

wobei beim ersten Gleichheitszeichen die Induktionsannahme angewandt und beim dritten Gleichheitszeichen die dritte binomische Formel verwendet wurde. Somit haben wir die gewünschte Formel für $n+1$ gezeigt.

(d) Verankerung: Für $n = 1$ ist die Aussage trivial:

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 = 2 - 1 = 2! - 1$$

Induktionsannahme: Die Formel gelte nun für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Betrachten wir die Summe, so sehen wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= (n+1) \cdot (n+1)! + \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \\ &= (n+1) \cdot (n+1)! + (n+1)! - 1 \\ &= ((n+1)+1) \cdot (n+1)! - 1 \\ &= (n+2) \cdot (n+1)! - 1 = (n+2)! - 1,\end{aligned}$$

was die gesuchte Identität für $n+1$ ist.

1.5. Induktionsbeweis

Wo liegt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis? Begründen Sie Ihre Antwort!

Behauptung *Alle Pferde haben dieselbe Farbe.*

Beweis Sei $P(n)$ die Aussageform, dass in jeder Ansammlung von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. $P(1)$ ist offensichtlich wahr.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $P(k)$ wahr sei, und wollen $P(k+1)$ beweisen: Nehmen wir eine beliebige Gruppe von $k+1$ Pferden. Schicken wir eines weg, so bleiben k Pferde über, die also alle die gleiche Farbe haben. Holen wir das Pferd zurück und schicken ein anderes weg, so bleiben wieder k Pferde über, die dann auch alle die gleiche Farbe haben. Pferde ändern ihre Farbe nicht, also muss dies dieselbe Farbe wie die der ersten Gruppe sein. Somit haben alle $k+1$ Pferde die gleiche Farbe. Damit gilt $P(k)$ für alle $k \geq 1$.

Q.E.D.

Lösung. Der Schritt von $k = 1$ zu $k + 1 = 2$ ist falsch!
Wenn man je 1 Pferd wegnimmt, ist das übriggebliebene Pferd zwar einfarbig, aber entgegen der Behauptung müssen die Farben nicht gleich sein.

1.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online über Moodle, siehe Vorlesungswebseite.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wählen Sie die richtige Aussagen.

- **(i)** Seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Sei $B \subset Y$ eine Teilmenge. Dann gilt $f(f^{-1}(B)) = B$.
- **(ii)** Seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Sei $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann gilt $f^{-1}(f(A)) = A$.
- **(iii)** Seien A und B mathematische Aussagen. Dann ist $(\neg A \to B) \wedge (B \to A)$ immer wahr.
- **(iv)** Seien A und B mathematische Aussagen. Dann ist $(A \vee (\neg A \wedge B)) \iff (A \vee B)$ immer wahr.

(b) Welches ist die Negation dieser Aussage: “Es regnet und ich habe keinen Regenschirm”?

- **(i)** Es regnet nicht oder ich habe einen Regenschirm.
- **(ii)** Es regnet nicht und ich habe keinen Regenschirm.
- **(iii)** Ich habe einen Regenschirm.
- **(iv)** Es regnet nicht, daher habe ich keinen Regenschirm.

(c) Welches ist die Kontraposition dieser Aussage: “Wenn es regnet und ich keinen Regenschirm habe, werde ich nass”?

- **(i)** Wenn es nicht regnet, werde ich nicht nass und ich habe keinen Regenschirm.
- **(ii)** Wenn ich nass werde, regnet es und ich habe keinen Regenschirm.
- **(iii)** Wenn ich nicht nass werde, regnet es nicht oder ich habe einen Regenschirm.
- **(iv)** Wenn ich einen Regenschirm habe, regnet es nicht und ich werde nicht nass.

(d) Welche ist die Negation dieser Aussage: “10 ist gerade und ist kleiner oder gleich 11.” ?

- **(i)** 10 ist nicht gerade.
- **(ii)** 10 ist grösser als 11.

(iii) 10 ist nicht gerade oder ist grösser als 11.

(iv) 10 ist nicht gerade, deshalb ist es grösser als 11.

Lösung.

(a) (iv)

(b) (i)

(c) (iii), die Kontraposition einer Implikation $p \Rightarrow q$ ist gegeben durch $\neg q \Rightarrow \neg p$

(d) (iii)