3.1. Komplexe Zahlen

Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Standardform, d.h. in die Form $a + bi$ mit a, b reell:

(a) $(3 + 2i)(6 - 5i)$

(b) $\frac{1}{1+i}$

(c) $\frac{3+4i}{2-i}$

(d) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

(e) $\overline{(1 + i)^2} + (1 + i)^2$

(f) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

(g) $(1 + i)^6$ (*Hinweis*: Polarform verwenden)

Lösung.

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}(3 + 2i)(6 - 5i) &= (3 \cdot 6 - 2 \cdot (-5)) + (3 \cdot (-5) + 2 \cdot 6)i \\ &= 28 - 3i\end{aligned}$$

(b) Man bemerke, dass aus $|z|^2 = z\overline{z}$ die Identität $|1 + i|^2 = (1 + i)(1 - i) = 2$ folgt. Also gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+i} &= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\end{aligned}$$

(c) Analog zur vorherigen Aufgabe finden wir $|2 - i|^2 = (2 - i)(2 + i) = 5$, daher:

$$\begin{aligned}\frac{3+4i}{2-i} &= \frac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\ &= \frac{2+11i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i\end{aligned}$$

(d) Abermals ergibt sich durch $(1+i)(1-i)=2$:

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}\\ &= \frac{2i}{2} = i\end{aligned}$$

Daher wissen wir:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = i^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 4k \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0,\\ i & \text{falls } n = 4k+1 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0\\ -1 & \text{falls } n = 4k+2 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0\\ -i & \text{falls } n = 4k+3 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

(e) Es gilt generell für komplexe Zahlen $z = a + bi$, a, b reell:

$$\overline{z} + z = (a - bi) + (a + bi) = 2a,$$

das heisst, die Summe ist das Doppelte des Realteils der Zahl. In unserem Fall gilt:

$$(1+i)^2 = 2i,$$

also ist der Realteil gerade 0 und somit finden wir:

$$\overline{(1+i)^2} + (1+i)^2 = 0$$

Eine direkte Berechnung führt zum gleichen Ergebnis.

(f) Dank der binomischen Formel finden wir:

$$(1+i\sqrt{3})^3 = 1^3 + 3\cdot i\sqrt{3} + 3\cdot(i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3 = 1 + 3\cdot i\sqrt{3} - 3\cdot 3 - i3\sqrt{3} = -8.$$

Daher gilt $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{-8}{8} = -1$

(g) Wir verwenden die Polarform: $1 + i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ für $r = \sqrt{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dann gilt:

$$(1+i)^6 = \left(re^{i\varphi}\right)^6 = r^6 e^{i6\varphi} = \sqrt{2}^6 e^{i6\frac{\pi}{4}} = 8e^{i\frac{3\pi}{2}} = 8\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = -8i$$

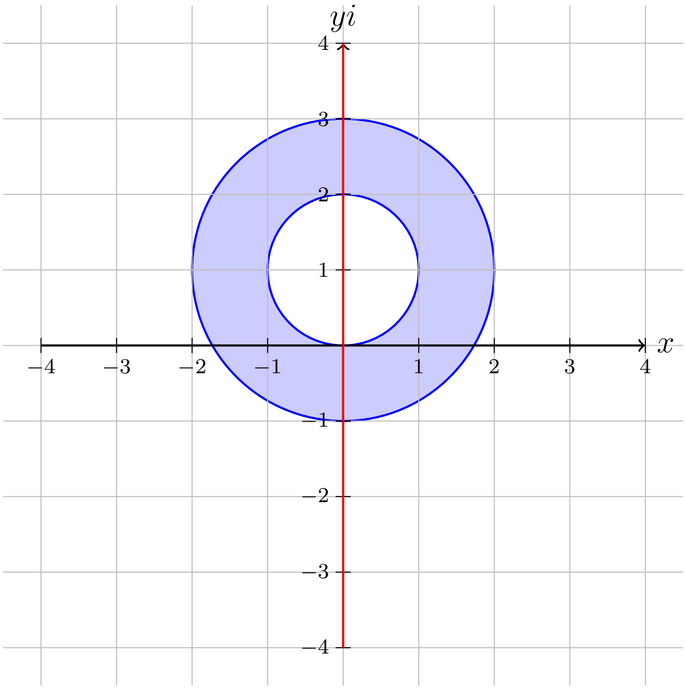
3.2. Punktmengen in $\mathbb{C}$

Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen ohne Computer oder andere technische Hilfsmittel:

(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - i| < 2\}$

(b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = |z + 1|\}$

Lösung. Im folgenden Bild ist die Menge M_1 rot eingefärbt und die Menge M_2 blau eingefärbt:



Dies kann wie folgt hergeleitet werden:

(a) Wir schreiben $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Wir bemerken, dass

$$z \in M_1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < |z - i|^2 < 4.$$

Wir schreiben $z - i = x + i(y - 1)$ und berechnen $|z - i|^2 = x^2 + (y - 1)^2$. Bezüglich x, y kann die Menge M_1 also wie folgt geschrieben werden:

$$M_1 = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ 1 < x^2 + (y - 1)^2 < 4\}$$

Es handelt sich also in der x, y-Ebene um einen Annulus (Kreisring) mit Mittelpunkt $(x, y) = (0, 1)$, äusseren Radius 2 und inneren Radius 1. Der Mittelpunkt $(x, y) = (0, 1)$ entspricht dabei der komplexen Zahl i.

Diese Schlussfolgerung kann auch intuitiv aus der Ungleichung $1 < |z - i| < 2$ gefolgert werden. Diese Ungleichung ist von allen komplexen Zahlen z erfüllt, deren Distanz zu i zwischen 1 und 2 liegt.

(b) Wir schreiben wieder $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und bemerken, dass

$$z \in M_2 \quad \Longleftrightarrow \quad |z-1|^2 = |z+1|^2.$$

Wir haben

$$|z-1|^2 = |x-1+iy|^2 = (x-1)^2 + y^2, \quad |z+1|^2 = |x+1+iy|^2 = (x+1)^2 + y^2.$$

Bezüglich x, y ist also die Menge M_2 gegeben durch

$$\begin{aligned} & (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & (x-1)^2 = (x+1)^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & -2x = 2x \\ \Longleftrightarrow \quad & x = 0. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$M_2 = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ x = 0\}.$$

Es handelt sich bei der Menge M_2 also genau um die rein imaginären Zahlen, oder bezüglich der x, y-Ebene um die y-Achse.

Auch diese Schlussfolgerung kann man intuitiv aus der Gleichung $|z-1| = |z+1|$ verstehen. Die Gleichung ist von allen komplexen Zahlen z erfüllt, welche die gleiche Distanz von 1 und -1 entfernt sind. Also die Mittelsenkrechte in der komplexen Ebene zwischen 1 und -1. Dies ist genau die imaginäre Achse.

3.3. Polynome in $\mathbb{C}$

Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Betrachten wir das Polynom

$$P(z) := az^2 + bz + c$$

für $z \in \mathbb{C}$. Sei $\sqrt{b^2 - 4ac}$ eine der Quadratwurzeln von $b^2 - 4ac$ (zur Erinnerung: falls $b^2 - 4ac \neq 0$ hat $b^2 - 4ac$ genau zwei unterschiedliche Quadratwurzeln q_1 und q_2 in $\mathbb{C}$ und es gilt $q_1 = -q_2$).
Seien

$$\alpha_+ := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \alpha_- := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $P(\alpha_+) = 0$ und $P(\alpha_-) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $P(z) = a(z-\alpha_+)(z-\alpha_-)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Schliessen Sie daraus, dass α_+ und α_- die einzigen Nullstellen von P sind. (Bemerken Sie, dass möglicherweise $\alpha_+ = \alpha_-$, nämlich wenn $b^2 - 4ac = 0$.)

(c) Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Polynomen:

a) $z^2 + 6z + 10$

b) $4z^2 + (4i)z - 1$

c) $(z^2+1)(z-3i)^2$

Lösung.

(a) Wir setzen α_+ in P ein:

$$\begin{aligned}
P(\alpha_+) &= a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c \\
&= a\frac{b^2+b^2-4ac-b\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2} + \frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + c \\
&= \frac{2a}{4a^2}(b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}) + \frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + c \\
&= \frac{1}{2a}(b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}+2ac) = 0.
\end{aligned}$$

Analog zeigt man $P(\alpha_-) = 0$.

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
a(z-\alpha_+)(z-\alpha_-) &= a\left(z - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\
&= az^2 + 2az\frac{b}{2a} + a\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = az^2 + baz + c = P(z).
\end{aligned}$$

Sei nun $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P, d.h. $P(z_0) = 0$. Dann gilt

$$(z_0-\alpha_+)(z_0-\alpha_-) = 0.$$

Es folgt, dass $z_0 - \alpha_+ = 0$ oder $z_0 - \alpha_- = 0$ (da $\mathbb{C}$ ein Körper ist). Also gilt $z_0 = \alpha_+$ oder $z_0 = \alpha_-$.

(c) a) $-3-i, \quad -3+i$

b) $-\frac{i}{2}$

c) $i, -i, 3i$

3.4. Binomischer Lehrsatz

In dieser Übung werden wir den binomischen Lehrsatz beweisen, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion.

(a) Bemerken Sie zunächst, dass der Lehrsatz im Fall $n = 1$ wahr ist.

Nehmen wir nun an, dass der Lehrsatz für $n = N \in \mathbb{N}$ wahr ist. Wir werden zeigen, dass der Lehrsatz auch für $n = N + 1$ wahr ist.

(b) Anhand der Induktionsannahme zeigen Sie, dass

$$(x+y)^{N+1} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N-k} y^{k+1}.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N-k} y^{k+1} = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k-1} x^{N+1-k} y^k + \binom{N}{N} y^{N+1}$$

(d) Schliessen Sie, dass

$$(x+y)^{N+1} = \binom{N}{0} x^{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \left[\binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} \right] x^{N+1-k} y^k + \binom{N}{N} y^{N+1}$$

(e) Benutzen Sie die Pascal-Identität[1]

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{0, 1, ..., n\}$$

und die obige Teilaufgaben, um den Beweis des binomischen Lehrsatzes abzuschliessen.

Lösung.

Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

[1] Sie finden einen Beweis der Pascal-Itentität auf der Wikipedia-Seite "Binomialkoeffizient".

(a) Für $n = 1$ gilt $(x+y)^n = x + y$ und

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

(b) Es gilt

$$(x+y)^{N+1} = x(x+y)^N + y(x+y)^N.$$

Nach Induktionsannahme gilt also

$$\begin{aligned}(x+y)^{N+1} &= x \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N-k} y^k + y \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N-k} y^{k+1}.\end{aligned}$$

(c) Wir schreiben

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N-k} y^{k+1} = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N}{k} x^{N-k} y^{k+1} + \binom{N}{N} y^{N+1}.$$

In der Summe auf der rechten Seite ersetzen wir k mit $h = k + 1$:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \binom{N}{k} x^{N-k} y^{k+1} = \sum_{h=1}^{N} \binom{N}{h-1} x^{N-h+1} y^h.$$

Damit erhält man

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N-k} y^{k+1} = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k-1} x^{N+1-k} y^k + \binom{N}{N} y^{N+1},$$

wobei h wieder zu k umbenennt wurde.

(d) Wenn man den Ausruck aus $c)$ in $b)$ einsetzt, erält man

$$\begin{aligned}(x+y)^{N+1} =& \binom{N}{0} x^{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} x^{N+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k-1} x^{N+1-k} y^k + \binom{N}{N} y^{N+1} \\ & \binom{N}{0} x^{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \left[\binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} \right] x^{N+1-k} y^k + \binom{N}{N} y^{N+1}.\end{aligned}$$

(e) Nach der Pascal-Identität gilt

$$\binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} = \binom{N+1}{k}$$

für jedes $k \in \{1, ..., N\}$. Deswegen folgt aus d), dass

$$(x+y)^{N+1} = \binom{N}{0} x^{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \binom{N+1}{k} x^{N+1-k} y^k + \binom{N}{N} y^{N+1}.$$

Da

$$\binom{N}{0} = \binom{N+1}{0} = 1 \text{ und } \binom{N}{N} = \binom{N+1}{N+1} = 1$$

erhalten wir

$$(x+y)^{N+1} = \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} x^{N+1-k} y^k.$$

Wir haben damit die Aussage für $n = N+1$ gezeigt, unter der Annahme, dass die Aussage für $n = N$ gilt. Da die Aussage für $n = 1$ gilt (Teilaufgabe a) folgt aus vollständiger Induktion, dass die Gleichung für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3.5. Supremum und Infimum Es sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge und wir definieren:

$$-A := \Big\{ -a \;\Big|\; a \in A \Big\}$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \inf(-A) = -\sup A$$

Lösung. Wir zeigen zuerst die erste Gleichung: $\sup(-A) = -\inf A$. Es sei u eine untere Schranke von A. Dann gilt:

$$\forall a \in A : \quad u \leq a.$$

Folglich gilt auch

$$\forall a \in A : \quad -u \geq -a$$

Dies impliziert nun, dass $-u$ eine obere Schranke von $-A$ ist. Da insbesondere $\inf A$ eine untere Schranke von A ist, folgt somit, dass $-\inf A$ eine obere Schranke von $-A$ ist. Da $\sup(-A)$ die kleinste obere Schranke von $-A$ ist, muss gelten

$$\sup(-A) \leq -\inf A$$

Sei nun o eine obere Schranke von $-A$. Mit demselben Argument wie oben zeigt man, dass $-o$ eine untere Schranke von A ist. Daher ist insbesondere $-\sup(-A)$ eine untere Schranke von A, also

$$-\sup(-A) \leq \inf A$$

Multiplikation beider Seiten mit -1 dreht die Ungleichung um und ergibt:

$$\sup(-A) \geq -\inf A$$

Damit können wir nun schliessen:

$$\sup(-A) = -\inf A$$

Die zweite Gleichung, $\inf(-A) = -\sup(A)$ folgt nun aus der ersten Gleichung unter Verwendung von $-(-A) = A$:

$$\sup(A) = \sup(-(-A)) = -\inf(-A).$$

Multiplikation mit -1 ergibt die gesuchte Gleichung.

Alternativ kann man analog zum Beweis der ersten Gleichung vorgehen.

3.6. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wie viele verschiedene Nullstellen hat das folgende Polynom?

$$P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad P(z) = z \cdot \left(z^2 + 1\right)^2 - z^2 - z^5$$

- **(i)** 0
- **(ii)** 1
- **(iii)** 3
- **(iv)** 5

(b) Bestimmen Sie das Maximum der Menge A definiert wie folgt:

$$A := \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup]2, 4[$$

- **(i)** Existiert nicht.
- **(ii)** 1
- **(iii)** 4
- **(iv)** $+\infty$

(c) Was für eine geometrische Form hat die folgende Menge:

$$M := \left\{ c \in \mathbb{C} \;\middle|\; |c-1| = 2 \right\}?$$

- **(i)** Ein Quadrat mit den Eckpunkten $(-1,-2), (-1,2), (3,-2)$ und $(3,2)$
- **(ii)** Ein Geradenabschnitt vom Punkt $(-1,0)$ zu $(3,0)$
- **(iii)** Ein Kreis mit Mittelpunkt i und Radius 2
- **(iv)** Ein Kreis mit Mittelpunkt 1 und Radius 2

Lösung.

(a) (iii)

(b) (i)

(c) (iv)