5.1. Häufungspunkte Explizit Bestimmen

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der folgenden Folgen reeller Zahlen:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := (-1)^n$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := \frac{(1+(-1)^n)n^3}{n^2-n+1}$

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$

Hinweis: *Ein Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Zahl, welche der Grenzwert einer Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.*

Lösung.

(a) Die Teilfolgen $b_n = a_{2n} = 1$ und $c_n = a_{2n-1}$ sind konstant und konvergieren gegen 1 und -1. Damit sind dies Häufungspunkte. Da jede Teilfolge nur die Werte 1 und -1 annehmen kann, sind dies zugleich alle Häufungspunkte.

(b) Durch Kürzen finden wir:

$$a_n = \frac{n+1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

Sowohl Zähler als auch Nenner konvergieren gegen 1, damit konvergiert die gesamte Folge gegen 1. Eine konvergente Folge hat aber gerade seinen Grenzwert als einzigen Häufungspunkt, denn jede Teilfolge konvergiert per Definition ebenfalls gegen den gleichen Grenzwert. Daher ist 1 der einzige Häufungspunkt.

(c) Die Teilfolge $b_n = a_{2n-1} = 0$ ist konstant und konvergiert somit mit Grenzwert 0. Daher ist 0 ein Häufungspunkt. Wir bemerken, dass $c_n := a_{2n}$ unbeschränkt ist. Denn

$$c_n = \frac{2(2n)^3}{(2n)^2-(2n)+1},$$

und der Zähler ist ein Polynom vom Grad 3, während der Nenner nur Grad 2 hat. Es sei nun (d_n) eine konvergente Teilfolge von (a_n). Dann kann (d_n) nur endlich viele gemeinsame Glieder mit (c_n) haben, da jede konvergente Folge beschränkt ist. Somit muss (d_n) alle bis auf endlich viele Glieder mit (b_n) gemeinsam haben. Da (b_n) aber konvergiert mit Grenzwert 0, muss auch (d_n) eine Nullfolge sein. Somit ist 0 der einzige Häufungspunkt.

(d) Wir beweisen zuerst:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Dies folgt per Induktion. Für $n = 1$ ist die Identität offensichtlich, nehmen wir nun also an, dass die Gleichung für ein n gilt. Dann sehen wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k = (n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{n^2+n}{2n^2}$$

Mit den Resultaten aus der Vorlesung folgt, dass die Folge somit gegen $1/2$ konvergiert und dies daher der einzige Häufungspunkt ist, wie bereits in Teilaufgabe b) erklärt.

5.2. Unendlich viele Häufungspunkte

In dieser Aufgabe konstruieren wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Menge von Häufungspunkten das ganze Intervall $[0,1]$ ist. Wir konstruieren die Folge so, dass die Folgeglieder gerade die dyadischen Zahlen zwischen 0 und 1 sind; das sind Zahlen der Form $\frac{j}{2^k}$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ und ein $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$.

Genauer: wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad 2^k \leq n < 2^{k+1} \quad \text{sei} \quad a_n := \frac{n-2^k}{2^k}.$$

Als Beispiel, die ersten paar Folgeglieder sind also:

$$\begin{aligned}&a_1 = 0,\\ &a_2 = 0,\ a_3 = \frac{1}{2},\\ &a_4 = 0,\ a_5 = \frac{1}{4},\ a_6 = \frac{1}{2},\ a_7 = \frac{3}{4},\\ &a_8 = 0,\ a_9 = \frac{1}{8},\ a_{10} = \frac{1}{4},\ a_{11} = \frac{3}{8},\ a_{12} = \frac{1}{2},\ a_{13} = \frac{5}{8},\ a_{14} = \frac{3}{4},\ a_{15} = \frac{7}{8},\ \ldots\end{aligned}$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass die Menge der Häufungspunkte dieser Folge gerade das Intervall $[0,1]$ ist.

(a) Sei $r \in [0,1]$. Zeigen Sie: $\forall k \in \mathbb{N}_0,\ \exists n \in \{2^k, 2^k+1, ..., 2^{k+1}-1\}$, sodass

$$\left| \frac{n-2^k}{2^k} - r \right| \leq \frac{1}{2^k}. \tag{1}$$

(b) Sei r wie in (a), $\forall k \in \mathbb{N}_0$ sei $b_k^r = \frac{n_k - 2^k}{2^k}$, wo n_k das kleinste Element in $\{2^k, 2^k+1, ..., 2^{k+1}-1\}$ ist, welches Bedingung (1) erfüllt.
Zeigen Sie: $\lim_{k\to\infty} b_k^r = r$.

(c) Sei $s \in [0,1]^c$ (zur Erinnerung: $[0,1]^c = \{r \in \mathbb{R}; r \notin [0,1]\}$). Zeigen Sie, dass s kein Haüfungpunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

(d) Schliessen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte dieser Folge gerade das Intervall $[0,1]$ ist.

Lösung.

(a) Sei $r \in [0,1]$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Wenn $n = 2^k$, dann ist $\frac{n-2^k}{2^k} = 0$ und wenn $n = 2^{k+1}-1$, dann ist $\frac{n+1-2^k}{2^k} = 1$. Da $0 \leq r \leq 1$, existiert also ein $n \in \{2^k, 2^k+1, ..., 2^{k+1}-1\}$, sodass

$$\frac{n-2^k}{2^k} \leq r \leq \frac{n+1-2^k}{2^k}.$$

Für dieses n gilt

$$0 \leq r - \frac{n-2^k}{2^k} \leq \frac{n+1-2^k}{2^k} - \frac{n-2^k}{2^k} = \frac{1}{2^k},$$

also

$$\left| r - \frac{n-2^k}{2^k} \right| = r - \frac{n-2^k}{2^k} \leq \frac{1}{2^k}.$$

(b) Zunächst bemerken wir, dass $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$ (siehe Vorlesung). Also, für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Aus Bedingung (1), folgt dass

$$|r - b_k^r| = \left| r - \frac{n_k - 2^k}{2^k} \right| \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Also gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|r - b_k^r| < \varepsilon$. Daher gilt $\lim_{k\to\infty} b_k^r = r$.

(c) Wir bemerken, dass $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $\forall n \in \{2^k, 2^k+1, ..., 2^{k+1}-1\}$

$$0 \leq \frac{n-2^k}{2^k} < 1.$$

Also gilt $0 \leq a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls nun $s > 1$, setzte $s - 1 = \varepsilon > 0$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|s - a_n| = s - a_n \geq s - 1 = \varepsilon.$$

Also kann es keine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geben, die gegen s konvergiert.

Ebenso, falls $s < 0$. Dann setzten wir $0 - s = -s = \varepsilon > 0$, und es gilt $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|s - a_n| = a_n - s \geq -s = \varepsilon.$$

Wir schliessen, dass ein Punkt $s \in [0,1]^c$ kein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sein kann.

(d) Sei

$$H := \{x \in \mathbb{R};\quad x \text{ ist Häufungspunkt der Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}.$$

Aus Punkt (c) folgt, dass $H \subseteq [0,1]$.

Sei nun $r \in [0,1]$. Aus Punkt (b) folgt, dass eine Teilfolge $(b_k^r)_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, sodass $\lim_{k\to\infty} b_k^r = r$. Deswegen ist r ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. $r \in H$. Da $r \in [0,1]$ beliebig war, schliesen wir, dass $H = [0,1]$.

5.3. Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *Nullfolge*, falls $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Zeigen Sie, dass jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} = \frac{1}{2}$$

erfüllt.

Lösung. Mit der dritten binomischen Formel folgt

$$\frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} = \frac{1+a_n-1}{a_n(\sqrt{1+a_n}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+a_n}+1}.$$

Da $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, konvergiert der Ausdruck rechts gegen $\frac{1}{2}$ und damit folgt die Behauptung.

5.4. Supremum und Konvergenz

Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Teilmenge. Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, sodass $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup A$.

Lösung. Es sei $a = \sup A$. Wir verfolgen folgende Idee: Da a die kleinste obere Schranke von A ist, gibt es in A Punkte beliebig nah an a. Wir konstruieren nun eine Folge, sodass die Folgenglieder sich a immer mehr annähern. Für jedes $n \in \mathbb{N}$, kann $a - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke für A sein. Daher gibt es ein Element von A, wir nennen es $a_n \in A$, sodass:

$$a - \frac{1}{n} < a_n \leq a,$$

(denn sonst wäre $a - \frac{1}{n}$ eine obere Schranke für A). So erhalten wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in A$ für alle n. Wir wollen nun zeigen, dass diese gegen a konvergiert. Beachte, dass $|a_n - a| = a - a_n$, da alle Folgeglieder $a_n \leq a$ erfüllen. Somit gilt also:

$$|a_n - a| = a - a_n < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

gemäss unserer Wahl von a_n. Dies zeigt die gewünschte Konvergenz.

Alternativ lässt sich das Resultat auch mittels einer monoton wachsenden Folge beweisen.

5.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wenn die Folge (a_n) konvergiert, dann hat (a_n) mindestens einen Häufungspunkt.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(b) Wenn die Folge (a_n) divergiert, dann hat (a_n) mindestens einen Häufungspunkt.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(c) Eine Folge (a_n) mit genau einem Häufungspunkt ist konvergent.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(d) Eine beschränkte Folge (a_n), welche nicht konvergiert, hat mindestens zwei Häufungspunkte.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(e) Eine beschränkte Folge mit genau einem Häufungspunkt ist konvergent.

(i) Wahr

(ii) Falsch

Lösung.

(a) (i)

(b) (ii)

(c) (ii)

(d) (i)

(e) (i)