6.1. Alternierende Reihen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende, reelle Nullfolge, d.h.

$$a_{n+1} \leq a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ sei

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n.$$

(a) Zeigen Sie zunächst, dass $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist.

(d) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$S_{2n+1} \leq S_k \leq S_{2n}, \quad \forall k \geq 2n+1.$$

(e) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ und $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$ existieren.

(f) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$$

(g) Schliessen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert.

Lösung.

(a) Nehmen wir zum Widerspuch an, dass $a_N < 0$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, folgt dass $a_n \leq a_N$, $\forall n \geq N$. Somit gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq a_N < 0,$$

was den gewünschten Widerspruch liefert.

(b) Sei $n \leq m$. Dann gilt

$$S_{2m} - S_{2n} = \sum_{k=n}^{m-1} (-a_{2k+1} + a_{2k+2}) \tag{1}$$

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, gilt $-a_{2k+1}+a_{2k+2} \leq 0, \forall k \in \{n, n+1, ..., m-1\}$. Also folgt aus (1), dass $S_{2m} \leq S_{2n}$.

(c) Sei $n \leq m$. Dann gilt

$$S_{2m+1} - S_{2n+1} = \sum_{k=n+1}^{m} (a_{2k} - a_{2k+1}) \tag{2}$$

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, gilt $a_{2k} - a_{2k+1} \geq 0$, $\forall k \in \{n+1, n+2, ..., m\}$. Also folgt aus (2), dass $S_{2m+1} \geq S_{2n+1}$.

(d) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und sei $k \geq 2n+1$. Falls k ungerade ist, schreiben wir $k = 2m+1$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus c), dass $S_k \geq S_{2n+1}$. Ausserdem gilt

$$S_{2m+1} = S_{2n} + \sum_{l=n}^{m-1} (-a_{2l+1} + a_{2l+2}) - a_{2m+1} \leq S_{2n},$$

da $-a_{2l+1} + a_{2l+2} \leq 0 \;\; \forall l \in \{n, n+1, ..., m-1\}$ und $a_{2m+1} \geq 0$.

Falls k gerade ist, schreiben wir $k = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus b), dass $S_k \leq S_{2n}$. Ausserdem gilt

$$S_{2m} = S_{2n+1} + \sum_{l=n+1}^{m-1} (a_{2l} - a_{2l+1}) + a_{2m} \geq S_{2n+1},$$

da $a_{2l} - a_{2l+1} \geq 0 \;\; \forall l \in \{n+1, n+2, ..., m-1\}$ und $a_{2m} \geq 0$.

(e) Die Folge $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach b) monoton fallend, und nach d) gilt $S_{2n} \geq S_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dank dem Satz über monotone Konvergenz besitzt die Folge $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ also ein Limes.
Analog, die Folge $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach c) monoton wachsend, und nach d) gilt $S_{2n+1} \leq S_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Deswegen besitzt die Folge $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ein Limes.

(f) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}. \tag{3}$$

Da $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$, erhält man, wenn man den Limes für $n \to \infty$ in (3) nimmt $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$.

(g) Da $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$ und $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ existieren und gleich sind, folgt aus d), dass

$$\limsup_{k\to\infty} S_k \leq \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} \leq \liminf_{k\to\infty} S_k,$$

darum $\limsup_{k\to\infty} S_k = \liminf_{k\to\infty} S_k$ und $\lim_{k\to\infty} S_k$ existiert. Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

6.2. Konvergenz von Reihen

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

Hinweis: *Benutzen Sie für (c) die Aufgabe 6.1*

Lösung.

(a) Wir verwenden das Quotientenkriterium, siehe Satz 3.7.2 im Skript. Wir betrachten $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{n^4}{3^n}$. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}}{\frac{n^4}{3^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Somit liefert das Quotientenkriterium die Konvergenz der Reihe.

(b) Es gilt

$$n+4 > n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desweiteren gilt

$$n^2 - 3n + 1 < n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

und $n^2 - 3n + 1 > 0$ für $n \geq 3$, also

$$\frac{1}{n^2 - 3n + 1} > \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad n \geq 3.$$

Also wenn $n \geq 3$, haben wir

$$\frac{n+4}{n^2 - 3n + 1} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Da die harmonische Reihe, $\sum_{n=1}^{\infty}$, divergent ist, siehe Vorlesung oder Beispiel 3.5.1 i) im Skript, divergiert somit auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$.

(c) Wir bemerken, dass:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert. Daher gilt gemäss Aufgabe 6.1, dass die Reihe konvergiert.

6.3. Eulersche Zahl I

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge gegeben durch

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, und dass $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geq 2$.

Hinweis: *Sie dürfen die Bernoullische Ungleichung benutzen:* $(1+x)^n \geq 1+nx$ $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1$ und $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge gegeben durch

$$b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, und dass $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \leq 4$.

Hinweis: *Benutzen Sie wieder die Bernoullische Ungleichung, wie auch die Ungleichung* $\frac{n}{n^2-1} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Bemerken Sie, dass $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und schliessen Sie aus den obigen Teilaufgaben, dass $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$ existieren, und dass $a \leq b$.

(d) Zeigen Sie, dass $a = b$.

Hinweis: *Benutzen Sie die Abschätzung:* $0 \leq b - a \leq b_n - a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Der Limes $e := a = b$ heisst Eulersche Zahl.

Lösung. Siehe Beispiel 3.3.2 ii) im Vorlesungsskript.

6.4. Exponentialfunktion I

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ sei

$$Exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Aus Beispiel 3.7.2 i) folgt, dass die Reihe absolut konvergiert.
Seien $x, y \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$Exp(x) \cdot Exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} \right).$$

Hinweis: *Sie dürfen Satz 3.8.2 benutzen.*

(b) Benutzen Sie Teilaufgabe a) und den binomischen Lehrsatz um zu schliessen, dass

$$Exp(x) \cdot Exp(y) = Exp(x+y).$$

Lösung.

(a) Aus Satz 3.8.2 folgt, dass

$$Exp(x) \cdot Exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!} = \sum_{l,k=0}^{\infty} \frac{x^k y^l}{k! l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^k y^l}{k! l!} \right).$$

Für jedes $l, k \in \mathbb{N}_0$ sei $n_k(l) = l + k$. Dann ist n_k eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}_0$ und $\{k, k+1, ...\}$ und für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^k y^l}{k! l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^k y^{(n_k(l)-k)}}{k!(n_k(l)-k)!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}.$$

Daher gilt

$$Exp(x) \cdot Exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} \right).$$

(b) Aus dem binomischen Lehrsatz folgt, dass

$$Exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!},$$

da $\forall n, k \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n!} x^k y^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n!} x^k y^{n-k} = \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}.$$

Definieren wir nun

$$\mathbb{1}_{\leq}(k,n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \leq n \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\leq}(k,n) \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\leq}(k,n) \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

Deswegen folgt aus (a), dass

$$Exp(x) \cdot Exp(y) = Exp(x+y).$$

6.5. Quotientenkriterium

Bestimmen Sie mithilfe des Quotientenkriteriums ob die folgenden Reihen konvergieren oder nicht:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{1-2n}}{n^2+1}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1+3n}(n+1)}{n^2 3^n}$$

Lösung.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ berechnen wir:

$$\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(n!)^2(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{2(2n+1)},$$

wobei wir die Definition der Fakultät zum Kürzen verwendet haben. Somit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{2(2n+1)} \right| = \frac{1}{4}.$$

Daher folgt gemäss Quotientenkriterium, dass die Reihe konvergiert.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ berechnen wir:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}2^{1-2(n+1)}}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{(-1)^n 2^{1-2n}} \right| = \frac{2^{1-2(n+1)}}{(n+1)^2+1} \frac{n^2+1}{2^{1-2n}} = 2^{-2} \frac{n^2+1}{n^2+2n+2}.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} = 1$$

schliessen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}2^{1-2(n+1)}}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{(-1)^n 2^{1-2n}} \right| = \frac{1}{4}.$$

Daher folgt mit dem Quotientenkriterium, dass die Reihe konvergiert.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ berechnen wir:

$$\frac{2^{1+3(n+1)}(n+2)}{(n+1)^2 3^{n+1}} \cdot \frac{n^2 3^n}{2^{1+3n}(n+1)} = \frac{2^3}{3} \frac{n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+1)}.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2}{n^3+3n^2+3n+1} = 1,$$

schliessen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{1+3(n+1)}(n+2)}{(n+1)^2 3^{n+1}} \cdot \frac{n^2 3^n}{2^{1+3n}(n+1)} \right| = \frac{8}{3}.$$

Daher folgt mit dem Quotientenkriterium, dass die Reihe nicht konvergiert.

6.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei a_n definiert durch

$$a_n = \begin{cases} 1 + \sqrt{\frac{k}{12k+1}} & n = 3k+1 \text{ für } k \geq 0, \\ \frac{5k^3+k}{k^3+1} & n = 3k+2 \text{ für } k \geq 0, \\ \frac{(-1)^k}{k} & n = 3k+3 \text{ für } k \geq 0. \end{cases}$$

Welche der Aussagen gilt?

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert.

(ii) $\liminf_{n\to\infty} a_n$ existiert.

(iii) $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 + \sqrt{1/12}$

(b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $b_n = \sup_{k\geq n} a_n$, monoton fallend und die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $c_n = \inf_{k\geq n} a_n$, monoton wachsend.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(c) Die Harmonische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ ist

(i) Konvergent

(ii) Divergent

Lösung.

(a) (ii)

(b) (i)

(c) (ii)