7.1. Eulersche Zahl II

Erinnern Sie sich, dass

$$Exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

für $z \in \mathbb{C}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, ..., n\}$ sei

$$a_k^{(n)} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{n^k}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $0 \leq a_k^{(n)} \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, ..., n\}$, und dass für fixes $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a_k^{(n)}.$$

Schliessen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq Exp(1).$$

Hinweis: *Benutzen Sie den binomischen Lehrsatz.*

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie: $\exists\, n_\varepsilon^0, n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$, mit $n_\varepsilon^0 \leq n_\varepsilon^1$, sodass $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon^0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} > Exp(1) - \varepsilon,$$

und $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon^1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0} (1 - a_k^{(n)}) \leq \varepsilon.$$

(d) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon^1$

$$\left| Exp(1) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right| < 2\varepsilon.$$

(e) Schliessen Sie, dass

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = Exp(1).$$

Lösung.

(a) Wir schreiben

$$a_k^{(n)} = \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} = \prod_{l=0}^{k-1}\frac{n-l}{n}.$$

Für jedes $l \in \{0, ..., k-1\}$ gilt $0 \leq n-l \leq n$, also $0 \leq \frac{n-l}{n} \leq 1$. Somit gilt auch für das Produkt: $0 \leq a_k^{(n)} \leq 1$. Weiter gilt für jedes fixes $l \in \{0, ..., k-1\}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-l}{n} = 1,$$

daher

$$\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = \lim_{n\to\infty}\prod_{l=0}^{k-1}\frac{n-l}{n} = \prod_{l=0}^{k-1}\lim_{n\to\infty}\frac{n-l}{n} = 1$$

(b) Aus dem binomischen Lehrsatz folgt, dass

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n\cdot(n-1)\cdot ...\cdot(n-(k-1))}{k!}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}a_k^{(n)}.$$

Da $a_k^{(n)} \leq 1$, gilt somit auch

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}a_k^{(n)} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = Exp(1).$$

(c) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = Exp(1),$$

existiert $n_\varepsilon^0 \in \mathbb{N}$, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon^0$ gilt

$$\left|Exp(1) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right| = Exp(1) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < \varepsilon.$$

Oder anders geschrieben:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} > Exp(1) - \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon^0.$$

Da für jedes $k \in \{1, ..., n_\varepsilon^0\}$
$$\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = 1,$$
existiert $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon^1$, und für jedes $k \in \{1, ..., n_\varepsilon^0\}$
$$|1 - a_k^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{n_\varepsilon^0 + 1}.$$
Somit gilt
$$\sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0} (1 - a_k^{(n)}) < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon^1.$$
Insbesonders kann man n_ε^1 so wählen, dass $n_\varepsilon^1 \geq n_\varepsilon^0$.

(d) Aus (c) folgt, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon^1 \geq n_\varepsilon^0$
$$\begin{aligned}
0 &\leq Exp(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a_k^{(n)} \\
&\leq Exp(1) - \sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0} \frac{1}{k!} a_k^{(n)} \\
&\leq \left| Exp(1) - \sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0} \frac{1}{k!} \right| + \left| \sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0} \frac{1}{k!} \left(1 - a_k^{(n)}\right) \right| \\
&< 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

(e) Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt aus (d), dass
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = Exp(1).$$

7.2. Exponentialfunktion II

(a) Zeigen Sie, dass $Exp(n) = e^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: *Benutzen Sie Aufgabe 7.1 und 6.4. Betrachten Sie zunächst die Fälle $n \in \mathbb{N}$ und $n = 0$.*

(b) Zeigen Sie, dass $Exp(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Hinweis: *Zeigen Sie zunächst, dass*
$$Exp\left(\frac{p}{q}\right) = \left(Exp\left(\frac{1}{q}\right)^p\right)$$
$\forall p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0.$

Lösung.

(a) Aus Serie 6, Aufgabe 6.4, folgt (zum Beispiel mittels vollständiger Induktion), dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$Exp(1)^n = Exp(n).$$

Da $Exp(1) = e$ gemäss Aufgabe 7.1, gilt also $Exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Des Weiteren gilt

$$Exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 1 = e^0$$

und für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$Exp(-n) \cdot Exp(n) = Exp(0) = 1,$$

deswegen

$$Exp(-n) = Exp(n)^{-1} = e^{-n}.$$

(b) $\forall p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q \neq 0$ folgt aus Aufgabe 6.4, dass

$$Exp\left(\frac{1}{q}\right)^p = Exp\left(\frac{p}{q}\right)$$

(das kann man wieder mittels vollständiger Induktion bezüglich p zeigen). Insbesonders gilt

$$Exp\left(\frac{1}{q}\right)^q = Exp(1) = e.$$

Daher

$$Exp\left(\frac{p}{q}\right) = Exp\left(\frac{1}{q}\right)^p = \left(e^{\frac{1}{q}}\right)^p = e^{\frac{p}{q}}.$$

7.3. Zeta-Funktion Für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 0$, betrachten wir die folgende Reihe:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Dies definiert die berühmte *Riemannsche Zeta Funktion.*

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe für $s \leq 1$ divergent ist.

Hinweis: *Vergleichen Sie die Reihe in $\zeta(s)$ mit der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.*

(b) Sei nun $s > 1$. Betrachten Sie für $N \in \mathbb{N}$ die partiellen Summen

$$\sum_{n=1}^{2^N-1} \frac{1}{n^s}$$

. Zerlegen Sie diese partielle Summe wie folgt:

$$\sum_{n=1}^{2^N-1} \frac{1}{n^s} = \sum_{k=0}^{N-1} \Big(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n^s} \Big).$$

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n^s} \leq 2^{(1-s)k}.$$

(c) Schliessen Sie, dass die Reihe $\zeta(s)$ für $s > 1$ konvergent ist.

Lösung.

(a) Für $s \leq 1$ gilt $n^s \leq n$, also

$$\frac{1}{n^s} \geq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ s \leq 1.$$

Damit gilt auch für jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Da die harmonische Reihe divergent ist (siehe Beispiel 3.5.1 i) im Skript), also $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty$, gilt dasselbe auch für die Reihe in der Definition von $\zeta(s)$ für $s \leq 1$.

(b) Für alle $n \in \{2^k, 2^k+1, \ldots, 2^{k+1}-1\}$, gilt

$$\frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{(2^k)^s} = \frac{1}{2^{sk}}.$$

Die Summe

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n^s}$$

hat genau 2^k Terme, also gilt

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n^s} \leq 2^k \frac{1}{2^{sk}} = 2^{k-sk} = 2^{(1-s)k}.$$

(c) Wir betrachten für $N \in \mathbb{N}$ die partielle Summe

$$\sum_{n=1}^{2^N-1} \frac{1}{n^s} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n^s} \right),$$

wobei wir die Summe in N Teile zerlegt haben. Aus der vorherigen Teilaufgabe schliessen wir, dass

$$\sum_{n=1}^{2^N-1} \frac{1}{n^s} \leq \sum_{k=0}^{N-1} 2^{(1-s)k}.$$

Setzen wir $q = 2^{(1-s)}$, dann erkennen wir oben eine partielle Summe der geometrischen Reihe. Da $q < 1$ für $s > 1$, ist diese geometrische Reihe konvergent. Wir erhalten

$$\sum_{n=1}^{2^N-1} \frac{1}{n^s} \leq \sum_{k=0}^{N-1} q^k < \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-2^{(1-s)}}, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Somit ist für $s > 1$ die Folge von partiellen Summen $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^s}$ monoton wachsend und beschränkt, und somit auch konvergent.

7.4. Stückweise stetige Funktionen

Es seien $f_1 : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ und $f_2 :]-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen. Wir definieren dann eine weitere Funktion f wie folgt:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f(x) := \begin{cases} f_1(x), & \text{wenn } x \geq 0 \\ f_2(x), & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass falls $f_1(0) \neq f_2(0)$, dann ist f unstetig.

(b) Zeigen Sie, dass wenn $f_1(0) = f_2(0)$, dann ist f stetig.

(c) Wir betrachten die Funktion:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) := \begin{cases} x^2 + 3, & \text{wenn } x < 0 \\ cx + d, & \text{wenn } 0 \leq x < 1 \\ x^3 - x + 4, & \text{wenn } 1 \leq x \end{cases}$$

Wie müssen $c, d \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit f stetig ist?

Lösung.

(a) Wir heben zuerst hervor, dass Stetigkeit eine *lokale Eigenschaft* ist, das heisst, ob eine Funktion stetig ist oder nicht in einem Punkt hängt lediglich von den Werten in der Nähe des Punktes ab. Dadurch ist klar, dass f sicher in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ stetig ist, denn wenn (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert x ist, so folgt wegen $x > 0$ bzw. $x < 0$ auch, dass $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : a_n > 0$ bzw. $a_n < 0$. Das bedeutet, dass für $n \geq N$ gilt $f(a_n) = f_1(a_n)$ bzw. $f(a_n) = f_2(a_n)$. Da aber f_1 und f_2 stetig sind, folgt somit die gewünschte Konvergenz, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x)$, und daher Stetigkeit in $x \neq 0$.

Es reicht also, das Verhalten von f nahe 0 zu betrachten. Falls $f_1(0) \neq f_2(0)$, so wählen wir $a_n = -1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Stetigkeit von f_2 folgt:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f_2(a_n) = f_2(0) \neq f_1(0) = f(0),$$

da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dies zeigt gemäss Definition 4.1.3, dass f unstetig in 0 ist.

(b) Analog zur vorherigen Aufgabe reicht es, $x = 0$ zu begutachten. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dank der Stetigkeit von f_1 und f_2 wissen wir, dass $\delta_1, \delta_2 > 0$ existieren, sodass:

$$|f_1(x) - f_1(0)| < \varepsilon,$$

für alle $x \geq 0$ mit $|x| < \delta_1$ und analog:

$$|f_2(x) - f_2(0)| < \varepsilon,$$

für alle $x \leq 0$ mit $|x| < \delta_2$. Mit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ finden wir also für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$:

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon,$$

dank $f_1(0) = f_2(0)$. Daher ist f stetig in $x = 0$.

(c) Gemäss unseren vorherigen Betrachtungen, welche sich leicht auf die gegenwärtige Situation ausdehnen lassen, müssen wir nur noch prüfen:

$$0^2 + 3 = 3 = d = c \cdot 0 + d,$$

was Stetigkeit in 0 ergibt sowie:

$$c \cdot 1 + d = c + d = 4 = 1^3 - 1 + 4,$$

was Stetigkeit in 1 ergibt. Zusammen sind dies die Gleichungen:

$$d = 3,\ c + d = 4 \quad \Longrightarrow \quad c = 1,\ d = 3$$

Somit ist $c = 1$, $d = 3$ die einzige Lösung.

7.5. Stetige Funktionen

Bestimmen Sie, ob die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig sind

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-4x}{x-2} & \text{wenn } x \neq 2 \\ 8 & \text{wenn } x = 2, \end{cases}$

(b) $f(x) = \frac{1}{e^x-2}$,

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \leq 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x > 0. \end{cases}$

Hinweis: *Sie dürfen ohne Beweis die Tatsache benützen, dass die Sinusfunktion stetig ist.*

Lösung.

(a) Für $x \neq 2$ gilt

$$\frac{x^3-4x}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2+2x)}{x-2} = x^2+2x.$$

Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2x$ ist ein Polynom, und somit stetig auf $\mathbb{R}$. Da $g(2) = 8 = f(2)$, gilt $f = g$ auf ganz $\mathbb{R}$. Es folgt, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Die Funktion f ist für $x = \log(2)$ nicht definiert, also ist f keine Funktion auf $\mathbb{R}$, also schon gar nicht eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$.

Wenn wir die Funktion f nur auf dem Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{\log(2)\}$ betrachten, ist f stetig, da die Funktion $g(x) = e^x - 2$ stetig ist und auf $\mathbb{R} \setminus \{\log(2)\}$ nie null ist. Aber wenn sich x von unten her an $\log(2)$ nähert, dann divergiert $f(x)$ gegen $-\infty$, und wenn sich x von oben her an $\log(2)$ nähert, dann divergiert $f(x)$ gegen $+\infty$.

(c) Zunächst bemerken wir, dass f auf $(\infty, 0]$ und auf $(0, \infty)$ als Produkt von stetigen Funktionen stetig ist. Um zu zeigen, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{x\to 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Dafür bemerken wir, dass die Sinusfunktion durch 1 beschänkt ist. Deswegen gilt

$$\lim_{x\to 0^+} \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \lim_{x\to 0^+} |x| = 0.$$

Wir schliessen, dass f stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

7.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$ ist stetig.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(b) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Jede stetige, surjektive Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$ ist monoton.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(c) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Es existiert eine surjektive stetige Funktion $f : [a, b] \to]c, d[$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(d) Ist die folgende Funktion stetig?

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ f(x) := \begin{cases} -x & \text{wenn } x < 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ x & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$$

(i) Ja

(ii) Nein

Lösung.

(a) (ii)

(b) (ii)

(c) (ii)

(d) (i)