8.1. Streng monoton wachsende stetige Funktionen

Man definiert den Sinus hyperbolicus als

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(Exp(x) - Exp(-x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(a) Zeigen Sie, dass sinh stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass sinh streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$.

(d) Schliessen Sie, dass sinh bijektiv ist, und dass $\sinh^{-1}$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

Die Funktion $\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *Areasinus hyperbolicus*, und wird als arsinh geschrieben.

Lösung.

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Funktion $Exp(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist. Da auf jedem Intervall (a, b) (für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$) $Exp(x)$ von unten durch eine positive Zahl beschränkt ist, ist auch $Exp(-x) = \frac{1}{Exp(x)}$ auf $\mathbb{R}$ stetig. Daher ist sinh als Linearkombination von stetigen Funktionen stetig.

(b) Aus der Vorlesug ist bekannt, dass $Exp(x)$ auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist. Deswegen ist $Exp(-x) = \frac{1}{Exp(x)}$ streng monoton follend. Dann ist $-Exp(-x)$ streng monoton wachsend, daher ist sinh als Summe von zwei streng monoton wachsenden Funktionen auch streng monoton wachsend.

(c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim_{x\to\infty} Exp(x) = \infty$ und dass $\lim_{x\to-\infty} Exp(x) = 0$. Deswegen gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}(Exp(x) - Exp(-x)) = \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} Exp(x) - \frac{1}{2} \lim_{x\to-\infty} Exp(x) = \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} Exp(x) = \infty.$$

Ähnlicherweise gilt

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}(Exp(x) - Exp(-x)) = \frac{1}{2} \lim_{x\to-\infty} Exp(x) - \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} Exp(x) = -\frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} Exp(x) = -\infty.$$

(d) Da sinh stetig und streng monoton wachsend ist, mit $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty$, folgt aus dem Satz 4.6.3 im Skript, dass $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist, und dass $\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch stetig ist.

8.2. Summe und Produkt von gleichmässig stetigen Funktionen

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei gleichmässig stetige Funktionen.

(a) Zeigen Sie, dass $f + g$ gleichmässig stetig ist auf $\mathbb{R}$.

(b) Finden Sie ein Beispiel für gleichmässig stetige Funktion f und g auf $\mathbb{R}$, sodass $f \cdot g$ nicht gleichmässig stetig ist auf $\mathbb{R}$.

(c) Nehmen Sie nun zusätzlich an, dass f und g beschränkt sind auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $f \cdot g$ gleichmässig stetig ist auf $\mathbb{R}$.

Lösung.

(a) Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da f und g gleichmässig stetig sind, existieren $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x - y| < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$|x - y| < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad |g(x) - g(y)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Setzten wir nun $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Dann gilt

$$|(f + g)(x) - (f + g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \epsilon,$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$.

(b) Wir nehmen $f(x) = x$ und $g(x) = x$. Dann sind f und g gleichmässig stetig auf $\mathbb{R}$, aber $(f \cdot g)(x) = x^2$ ist nicht gleichmässig stetig auf $\mathbb{R}$.

(c) Es seien nun f, und g beschränkt. Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned}|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leq |g(x)| \cdot |f(x) - f(y)| + |f(y)| \cdot |g(x) - g(y)|\end{aligned}$$

Sei nun $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = M_1$ und $\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| = M_2$. Und sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann existieren, dank der gleichmässigen Stetigkeit von f und g, $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$:]

$$|x - y| < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2M_2},$$

$$|x - y| < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad |g(x) - g(y)| < \frac{\epsilon}{2M_1}.$$

Dann gilt, dank der Abschätzung oben, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$:

$$|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| < M_2 \frac{\epsilon}{2M_2} + M_1 \frac{\epsilon}{2M_1} = \epsilon.$$

Somit ist $f \cdot g$ gleichmässig stetig auf $\mathbb{R}$.

8.3. Beschränktheit von stetigen Funktionen auf kompakten Intervallen

Es sei
$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$
eine stetige Funktion, wobei $-\infty < a < b < \infty$. Zeigen Sie, dass f beschränkt ist, also
$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) < \infty, \qquad \inf_{x\in[a,b]} f(x) > -\infty,$$

Hinweis: *Laut Satz 4.7.3 im Skript ist f auf $[a, b]$ auch gleichmässig stetig. Verwenden Sie die Definition von gleichmässiger Stetigkeit, um $f(x)$ auf $[a, b]$ abzuschätzen.*

Lösung. Da $[a, b]$ ein kompaktes Interval ist, ist die stetige Funktion f sogar gleichmässig stetig auf $[a, b]$. Das heisst, für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $\forall x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Wir setzten nun $\epsilon = 1$. Somit gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in [a, b]$ gilt
$$|x - y| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| < 1.$$
Somit gilt auch
$$|x - y| < \delta \quad \implies \quad |f(x)| < |f(y)| + 1.$$
Setzen wir nun $y = a$, dann gilt für alle $x \in [a, a + \delta)$:
$$|f(x)| < |f(a)| + 1.$$
Wir können nun iterativ weiterfahren. Für jedes $x \in [a + \delta, a + 2\delta)$ gibt es ein $y \in [a, a + \delta)$ mit $|x - y| < \delta$, also gilt für solche x
$$|f(x)| < |f(y)| + 1 < |f(a)| + 2.$$
Nach n Schritten erhalten wir
$$|f(x)| < |f(a)| + n, \qquad \forall x \in [a, a + n\delta).$$
Da $b - a$ eine endliche Zahl ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $N\delta > b - a$. Laut der Ungleichung oben, gilt also $|f(x)| < |f(a)| + N$ für alle $x \in [a, b]$, und somit ist f beschränkt auf $[a, b]$.

8.4. Satz vom Minimum und Maximum

In dieser Aufgabe werden Sie beweisen, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten Interval ein Maximum besitzt. Es sei also wie in der vorherigen Teilaufgabe $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig (mit $-\infty < a < b < \infty$).

(a) Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $x_n \in [a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus der vorherigen Teilaufgabe eine konvergente Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt, sodass der Grenzwert

$$x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n(k)} \in [a,b],$$

ein Maximum der Funktion f auf $[a,b]$ ist, also

$$f(x_0) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Bemerkung: *Analog kann man zeigen, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten Inverval sein Minimum annimmt.*

Lösung.

(a) Sei $a = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Da a das Supremum von f auf $[a,b]$ ist, muss es Punkte x in $[a,b]$ geben mit $f(x)$ beliebig nahe an a. Konkret: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $x_n \in [a,b]$ mit $a - \frac{1}{n} < f(x_n) \le a$. Ansonsten wäre nämlich $a - \frac{1}{n}$ eine obere Schranke für $\{f(x),\, x \in [a,b]\}$, was nicht sein kann, da $a = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ die kleinste obere Schranke ist. Wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein solches $x_n \in [a,b]$ erhalten wir die gewünschte Folge, da offensichtlich $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

(b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a \le x_n \le b$. Somit können wir den Satz von Bolzano-Weierstrass (Satz 3.4.1 im Skript) anwenden, um eine konvergente Teilfolge zu erhalten: $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Nennen wir den Grenzwert x_0. Da $a \le x_n \le b\ \forall, n \in \mathbb{N}$, gilt dasselbe auch für x_0, also $x_0 \in [a,b]$. Da die Funktion f stetig ist, muss gelten

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n(k)}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n(k)}) = f(x_0).$$

Per Konstruktion unserer Folge, gilt aber auch

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n(k)}) = \sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

und somit: $f(x_0) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. x_0 ist also ein Maximum von f auf dem Intervall $[a,b]$.

8.5. Maximum und Minimum von Funktion

Es sei:

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{6x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Bestimmen Sie, ob die Funktion ein Maximum und/oder ein Minimum annimmt.

Lösung. Wir bemerken zuerst, dass f stetig ist auf $[1, \infty)$ (Der Nenner und der Zähler sind stetig, und der Nenner ist überall grösser Null). Des Weiteren gilt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Der Wert von f im Punkt $x = 1$ ist $f(1) = \frac{7}{4}$. Somit gibt es ein $R \in [0, \infty)$, sodass

$$f(x) < f(1) = \frac{7}{4}, \quad \forall x \in [0, \infty), \quad \text{mit} \quad x > R.$$

Das Supremum von f auf $[1, \infty)$ muss also im kompakten Intervall $[1, R]$ liegen. Nun können wir den Satz vom Minimum und Maximum (siehe vorherige Aufgabe) anwenden, um zu schliessen, dass f auf $[1, R]$ sein Maximum annimmt. Dies ist dann auch das Maximum von f auf ganz $[1, \infty)$.

Hingegen nimmt f auf $[1, \infty)$ kein Minimum an. Tatsächlich gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in [1, \infty)$. Da aber $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, ist 0 das Infimum von f, welches an keinem Punkt von $[1, \infty)$ angenommen wird.

8.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist mit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, dann existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = 0$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(b) Welche der folgenden Funktionen besitzen eine stetige Inverse?

(i) $f : [0, \pi] \to [0, 1],\ f(x) = \sin(x)$

(ii) $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1],\ f(x) = \sin(x)$

(iii) $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],\ f(x) = \sin(x)$

(iv) $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],\ f(x) = \sin(x)$

(c) Die Funktion $f(x) = x$ ist gleichmässig stetig auf $\mathbb{R}$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(d) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem jeweils angegebenen Definitionsbereich. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) $f(x)$ ist stetig auf $(0, \infty)$.

(ii) $f(x)$ ist gleichmässig stetig auf $(0, \infty)$.

(iii) $f(x)$ ist gleichmässig stetig auf $(0, 1)$.

(iv) $f(x)$ ist gleichmässig stetig auf $(1, \infty)$.

Lösung.

(a) (i)

(b) (ii) und (iv)

(c) (i)

(d) (i) und (iv)