9.1. Berechnung von Limes

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie dass

$$\lim_{x\to+\infty} x^k \ \exp(-x) = 0$$

Hinweis: *Bemerken Sie, dass* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ *und*

$$\exp(x) > \frac{x^{k+1}}{k+1!} \text{ für } x > 0$$

(b) Sei $\alpha > 0$ beliebig. Wir definieren für $x > 0$:

$$x^\alpha = \exp(\alpha \log(x)).$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log(x) = 0$$

Hinweis: *Benützen Sie die Substitution* $y = -\alpha \log(x)$ *und den Limes*

$$\lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty$$

Lösung.

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Aus der Definition von exp, also $\exp(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$, folgt, dass

$$\exp(x) > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}, \quad \forall x > 0.$$

Deswegen

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} < \frac{(k+1)!}{x^{k+1}} \quad \forall x > 0.$$

Es folgt, dass

$$0 < x^k \exp(-x) < \frac{(k+1)!}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

folgt dass

$$\lim_{x\to\infty} x^k \exp(-x) = 0.$$

(b) Sei $\alpha > 0$. Für jedes $x > 0$ sei

$$y(x) = -\alpha \log(x).$$

Dann gilt $\forall x > 0$:

$$x^\alpha \log(x) = \exp(-y(x)) \frac{y(x)}{-\alpha}.$$

Wir bemerken, dass

$$x \to 0^+ \iff y(x) \to \infty.$$

Deswegen

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log(x) = \lim_{y \to \infty} \exp(-y) \frac{y}{-\alpha} = 0$$

wegen Teil a) mit $k = 1$.

9.2. Bernoulli-de L'Hôpital

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mithilfe des Satzes von Bernoulli-de L'Hôpital

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$

(c) $\lim_{x \to \infty} \frac{\log(3x)}{x^2}$

(d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x^2 - x - 2}$

Lösung. Bemerken Sie zunächst, dass in allen Beispielen die Bedingungen des Satzes Bernoulli-de L'Hôpital erfüllt sind. Wir berechnen:

(a)

$$(e^x - 1)' = e^x, \quad (x)' = 1,$$

deswegen

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

(b)

$$(e^x - 1)' = e^x, \quad (x^2)' = 2x$$

deswegen

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2x} = \infty.$$

(c)

$$(\log(3x)' = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0, \quad (x^2)' = 2x$$

deswegen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{Log}(3x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

(d)

$$(x^3 - 6x^2 + 8x)' = 3x^2 - 12x + 8, \quad (x^2 - x - 2)' = 2x - 1$$

deswegen

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 12x + 8}{2x - 1} = \frac{3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 8}{2 \cdot 2 - 1} = -\frac{4}{3}.$$

9.3. Differenzierbarkeit

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ob diese an der Stelle $x = 0$ differenzierbar sind.

(a) $f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Lösung. Per Definition ist die Funktion f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar, falls der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

In allen Beispielen oben gilt $f(0) = 0$, also müssen wir den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$$

studieren.

(a) Es gilt
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\Big(\frac{1}{x}\Big),$$
und dieser Grenzwert existiert, wie in der Vorlesung gesehen, nicht. (Die Funktion $\sin(\frac{1}{x})$ nimmt in jedem Intervall $(0,\delta)$ alle Werte in $[-1,1]$ an.) Also ist f an der Stelle $x=0$ nicht differenzierbar.

(b) Es gilt
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\Big(\frac{1}{x}\Big) = 0.$$
Dies folgt aus $\lim_{x\to 0} x = 0$ und der Beschränktheit von $\sin(\frac{1}{x})$. Die Funktion f ist also an der Stelle $x=0$ differenzierbar und die Ableitung ist $f'(0)=0$.

(c) Wir behaupten, dass
$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\right| = 0.$$
Tatsächlich, wenn wir $y = \frac{1}{|x|}$ setzen, dann gilt
$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\right| = \lim_{y\to\infty} ye^{-y^2} = 0,$$
dank der Aufgabe 9.1. Etwas präziser: Wir wissen aus der Aufgabe 9.1, dass $\lim_{y\to\infty} ye^{-y} = 0$, also existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R > 0$ mit $ye^{-y} < \varepsilon$ für alle $y > R$. Sei nun $|x| < \min(1, \frac{1}{R})$. Dann gilt $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{|x|}\frac{1}{|x|} > \frac{1}{|x|}$ und $\frac{1}{|x|} > R$. Also gilt
$$\frac{1}{|x|}e^{-\frac{1}{x^2}} < \frac{1}{|x|}e^{-\frac{1}{|x|}} < \varepsilon,$$
und da ε beliebig war, sehen wir
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0.$$
Somit ist f an der Stelle $x=0$ differenzierbar und $f'(0)=0$.

9.4. Umkehrsatz

Die Hyperbelfunktionen *Sinus hyperbolicus*, *Cosinus hyperbolicus* und *Tangens hyperbolicus* sind definiert auf $\mathbb{R}$ durch
$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ und $\tanh(x)$ auf $\mathbb{R}$.

(b) Sei f eine der obigen Funktionen. Bestimmen Sie

$$I_f = \{x \in \mathbb{R}; f'(x) > 0\}$$

und bemerken Sie, dass für alle drei Funktionen I_f ein Intervall ist.

(c) Skizzieren Sie die Graphen der drei Hyperbelfunktionen.

(d) Benutzen Sie den Umkehrsatz um zu zeigen, dass die drei Hyperbelfunktionen auf den entsprechenden Bereichen I_f bijektiv sind.
Man schreibt die Inverse der Hyperbelfunktionen als

$$\operatorname{arcsinh} = (\sinh)^{-1}, \quad \operatorname{arccosh} = (\cosh)^{-1}, \quad \operatorname{arctanh} = (\tanh)^{-1}.$$

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche von arcsinh, arccosh und arctanh.

(e) Bestimmen Sie die Ableitungen von arcsinh, arccosh und arctanh (als Funktionen der Hyperbelfunktionen und ihren Inversen).

(f) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen arcsinh, arccosh und arctanh.

Lösung.

(a)

$$\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x),$$
$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x),$$
$$\tanh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \tanh(x)^2$$

(b) Aus der Teilaufgabe a) sehen wir, dass $\sinh'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also

$$I_{\sinh} = \mathbb{R}.$$

Aus der Formel $\cosh'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ schliessen wir:

$$\cosh'(x) > 0 \iff e^x > e^{-x} \iff x > 0,$$

also gilt
$$I_{\cosh} = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\} = (0, \infty).$$
Da für alle $x \in \mathbb{R}$:
$$e^x + e^{-x} > e^x - e^{-x},$$
gilt
$$\tanh(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Mit der Formel in Teilaufgabe a) schliessen wir also
$$I_{\tanh} = \mathbb{R}.$$

(c) Eine Skizze der drei Hyperbelfunktionen finden Sie auf Seite 91 im Vorlesungsskript.

(d) Da sinh, cosh und tanh auf $\mathbb{R}$ differenzierbar sind, folgt aus dem Umkehrsatz, dass sie auf den entsprechenden Intervallen I_f aus der Teilaufgabe b) invertierbar sind.
Die Definitionsbereiche der Inversen ist die Bildmenge der jeweiligen Funktion auf dem Intervall I_f, also $f(I_f)$.

Da $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty$, schliessen wir dank dem Zwischenwertsatz, dass $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Da $\cosh(0) = 1$ und $\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \infty$ und cosh auf dem Intervall $I_{\cosh} = (0, \infty)$ monoton wachsend ist, schliessen wir $\cosh((0, \infty)) = (1, \infty)$.

Es gilt $|e^x - e^{-x}| < e^x + e^{-x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $|\tanh(x)| < 1$ auf $\mathbb{R}$. Da $\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$ und $\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$, schliessen wir, dass $\tanh(\mathbb{R}) = (-1, 1)$.

Also gilt:
$$D_{\text{arcsinh}} = \mathbb{R}, \quad D_{\text{arccosh}} = (1, \infty), \quad D_{\text{arctanh}} = (-1, 1).$$

(e) Aus dem Umkehrsatz folgt, dass
$$\text{arcsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\text{arcsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\text{arcsinh}(x))},$$
$$\text{arccosh}'(x) = \frac{1}{\cosh'(\text{arccosh}(x))} = \frac{1}{\sinh(\text{arccosh}(x))},$$
und
$$\text{arctanh}'(x) = \frac{1}{\tanh'(\text{arctanh})} = \frac{1}{1 - \tanh(\text{arctanh}(x))^2} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

(f) Eine Skizze der Inversen der drei Hyperbelfunktionen finden Sie auf den Wikipedia-Seiten
`https://de.wikipedia.org/wiki/Areasinus_hyperbolicus_und_Areakosinus_hyperbolicus`
und
`https://de.wikipedia.org/wiki/Areatangens_hyperbolicus_und_Areakotangens_hyperbolicus`.

9.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

(a) Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(\cos(\sin(x)))$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(i) $f'(x) = -\cos(x)\sin(\sin(x))\cos(\cos(\sin(x)))$

(ii) $f'(x) = \cos(x)\sin(x)\cos(x)$

(iii) $f'(x) = -\cos(\sin(-\cos(x)))$

(iv) $f'(x) = -\cos(x)\cos(\sin(x))\sin(\cos(\sin(x)))$

(b) Welche der folgenden Ableitungen sind korrekt? (Mehrere Antworten können korrekt sein)

(i) $\Big(\log(2x)\Big)' = 2\log(x)\frac{1}{x}$

(ii) $\Big(\exp(\sin(x))\Big)' = \cos(x)\exp(\sin(x))$

(iii) $\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos(x)}}$

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die an jeder Stelle in $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Weiter sei $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Dann existiert ein $x \in [0, 1]$ mit $f'(x) = 1$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(d) Betrachten Sie die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x + \sin(x)}{x}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(i) Wegen Bernoulli-de L'Hôpital existiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$ nicht.

(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert wegen Bernoulli-de L'Hôpital.

(iii) Man kann Bernoulli-de L'Hôpital nicht anwenden und $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert nicht.

(iv) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert, aber man kann Bernoulli-de L'Hôpital nicht anwenden.

Lösung.

(a) (i)

(b) (ii)

(c) (i)

(d) (iv)