## 10.1. Gleichmässige Konvergenz

Wir betrachten die Folge von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x \leq n \\ x - n, & \text{falls} \quad n < x < n+1 \\ 1, & \text{falls} \quad n+1 \leq x \end{cases}$$

**(a)** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f_n$.

**(b)** Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert gegen die Funktion

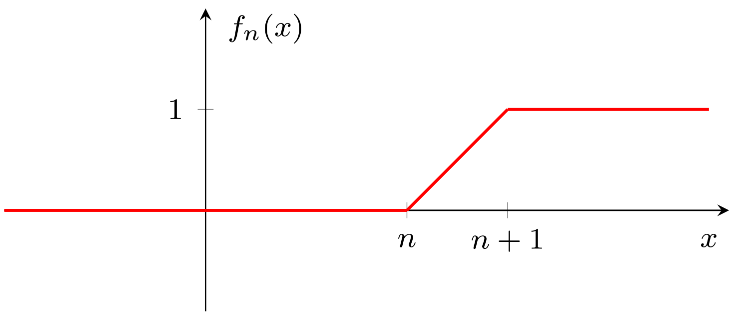
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

**(c)** Beweisen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmässig konvergiert auf $\mathbb{R}$.

**(d)** Betrachten Sie die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eingeschränkt auf $[-R, R]$ für ein $R > 0$. Zeigen Sie, dass die Folge gleichmässig auf $[-R, R]$ konvergiert.

**Lösung.**

**(a)**




**(b)** Es sei $x \in \mathbb{R}$ fix. Dann gilt für $n \geq x$:

$$f_n(x) = 0.$$

Das bedeutet, für $n$ gross genug, ist die Folge $(f_n(x))$ konstant gleich 0. Daher ist der punktweise Grenzwert der Funktionsfolge gerade $f(x) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$.

**(c)** Falls die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig konvergiert, muss der gleichmässige Grenzwert mit dem punktweisen Grenzwert übereinstimmen, also $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Man bemerke, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = f_n(x).$$

Daher gilt auch

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = 1,$$

da $f_n(x) = 1$ für alle $x \geq n+1$, was das Maximum der Funktion $f_n$ ist. Somit kann $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ nicht gegen Null konvergieren, und die Funktionenfolge konvergiert nicht gleichmässig auf $\mathbb{R}$ gegen $f$.

**(d)** Sei $R > 0$ gegeben. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq R$. Dann gilt für alle $n \geq N$ und alle $x \in [-R, R]$:

$$f_n(x) = 0,$$

denn $x \leq R \leq N \leq n$. Somit gilt also, dass die Funktionen $f_n$, für $n$ gross genug, konstant gleich 0 sind auf $[-R, R]$. Daher konvergiert die Funktionenfolge auf $[-R, R]$ trivialerweise gleichmässig gegen $f : [-R, R] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

## 10.2. Gleichmässige Konvergenz von gleichmässig stetigen Funktionen

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von gleichmässig stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Nehmen Sie an, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $f$ stetig ist. Zeigen Sie, dass $f$ sogar gleichmässig stetig ist.

**Lösung.** Sei $\varepsilon > 0$. Da $f_n$ gleichmässig gegen $f$ konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da $f_N$ gleichmässig stetig ist, gibt es $\delta > 0$ so dass

$$|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Dann können wir für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(y) + f_N(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies zeigt die gleichmässige Stetigkeit von $f$.

## 10.3. Punktweise und gleichmässige Konvergenz

Betrachten Sie die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Bestimmen Sie jeweils, ob die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert, und falls ja, was der Grenzwert ist. Ist die Konvergenz auch gleichmässig?

**(a)** $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{\sin(x)}{n}$

**(b)** $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \cos(n\pi x)$

**(c)** $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$

**Lösung.**

**(a)** Wir zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen die Funktion $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(x)}{n} - 0 \right| = \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |\sin(x)|}{n} = \frac{1}{n} \to 0, \quad \text{wenn} \quad n \to \infty.$$

Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowohl gleichmässig und auch punktweise gegen $f$.

**(b)** Wir behaupten, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht punktweise konvergiert. Tatsächlich gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(1) = \cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ -1 & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Deswegen konvergiert die Folge $(f_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht. Es folgt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht punktweise konvergiert. Daher konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch nicht gleichmässig.

**(c)** Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen die Funktion

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0,$$

die Folge konvergiert aber nicht gleichmässig, da $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in(0,1)} \left| \frac{1}{nx+1} - 0 \right| \geq \frac{1}{n\frac{1}{n} + 1} = \frac{1}{2}.$$

## 10.4. Gleichmässige Konvergenz und Ableitungen

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \sqrt{(1 - e^{-|x|})^2 + e^{-2n}}.$$

**(a)** Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) = (1 - e^{-|x|})^2$ von der Klasse $C^1$ ist auf $\mathbb{R}$. Schliessen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**(b)** Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 1 - e^{-|x|}$$

konvergiert.

***Hinweis:*** *Die Abschätzung* $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$, $\forall a, b \geq 0$ könnte hilfreich sein.

**(c)** Konvergiert die Folge von Ableitungen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmässig auf $\mathbb{R}$?

***Hinweis:*** *Argumentieren Sie mit dem Satz 5.4.1 im Skript.*

**Lösung.**

**(a)** Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die $g(x)$ offensichtlich von der Klasse $C^1$. Denn es gilt

$$x > 0: \; g(x) = (1 - e^{-x})^2, \qquad x < 0: \; g(x) = (1 - e^{x})^2.$$

Also ist die Ableitung:

$$x > 0: \; g'(x) = 2(1 - e^{-x})e^{-x}, \qquad x < 0: \; g'(x) = -2(1 - e^{x})e^{x},$$

oder anders geschrieben:

$$g'(x) = 2(1 - e^{-|x|})e^{-|x|}\operatorname{sgn}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

und dies ist eine stetige Funktion auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wir müssen noch die Stelle $x = 0$ betrachten. Um zu zeigen, dass $g$ an dieser Stelle differenzierbar ist, betrachten wir den Limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - e^{|x|})^2}{x}.$$

Wir bemerken, dass sowohl Nenner als auch Zähler gegen Null konvergieren wenn $x \to 0$. Weiter sind beide differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die Ableitung des Nenners nicht Null. Also können wir den Satz von Bernoulli-de L'Hôpital Anwenden, um zu schliessen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 - e^{|x|})^2}{x} = \lim_{x\to 0} 2(1 - e^{-|x|})e^{-|x|} = 0.$$

Somit ist $g$ an der Stelle Null differenzierbar und $g'(0) = 0$. Die Berechnung oben zeigt auch gleich, dass

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = 0 = g'(0),$$

also ist die Ableitung stetig.

Um zu zeigen, dass auch $f_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, verwenden wir die Kettenregel. Es gilt

$$f_n(x) = \sqrt{g(x) + e^{-2n}}.$$

Da $g(x) + e^{-2n} > 0$ und die Wurzelfunktion auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist, ergibt die Kettenregel die Differenzierbarkeit von $f_n$ mit

$$f_n'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x) + e^{-2n}}}.$$

Da $g$ und $g'$ stetig sind, und der Nenner nicht Null, ist auch $f_n'$ stetig, also $f_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

**(b)** Wir bemerken zunächst, dass für $a, b \in [0, \infty)$

$$a \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b,$$

daher

$$0 \leq \sqrt{a^2 + b^2} - a \leq b.$$

Setzen wir für $x \in \mathbb{R}$: $a = 1 - e^{-|x|}$ und $b = e^{-n}$, dann finden wir

$$0 \leq \sqrt{(1 - e^{-|x|})^2 + e^{-2n}} - (1 - e^{-|x|}) \leq e^{-n}.$$

Also gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{(1 - e^{-|x|})^2 + e^{-2n}} - (1 - e^{-|x|}) \right| \leq e^{-n}$$

Somit konvergiert $f_n$ gleichmässig gegen $f$.

**(c)** Die Folge $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmässig. Nehmen wir zum Widerspruch an, dass $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmässig gegen eine Funktion $h$ konvergiert. Da laut den vorherigen Teilaufgaben $f_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ für alle $n$ und $f_n \to f$ gleichmässig auf $\mathbb{R}$, wäre in diesem Fall Satz 5.4.1 im Skript anwendbar, und die Funktion $f$ müsste von der Klasse $C^1$ sein (mit $f' = h$). Jedoch ist $f(x) = 1 - e^{-|x|}$ an der Stelle $x = 0$ gar nicht differenzierbar. Also kann $f_n'$ nicht gleichmässig konvergieren.

**10.5. Online-MC**

**Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben:** Online auf Moodle.

**Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.**

**(a)** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

**(i)** $f$ ist injektiv.

**(ii)** $f$ ist surjektiv.

**(iii)** $f$ ist streng monoton wachsend.

**(iv)** $f$ ist streng monoton fallend.

**(v)** Keine der obigen Antworten.

**(b)** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

**(i)** $f$ ist injektiv.

**(ii)** $f$ ist surjektiv.

**(iii)** $f$ ist streng monoton wachsend.

**(iv)** $f$ ist streng monoton fallend.

**(v)** Keine der obigen Antworten.

**(c)** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$2 \geq f'(x) \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

**(i)** $f$ ist injektiv.

**(ii)** $f$ ist surjektiv.

**(iii)** $f$ ist streng monoton wachsend.

**(iv)** $f$ ist streng monoton fallend.

**(v)** Keine der obigen Antworten.

**Lösung.**

**(a)** (i), (iii)

**(b)** (v)

**(c)** (i), (ii), (iii)