11.1. Potenzreihen und Ableitungen

Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgende Identität zu beweisen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion:

$$\frac{1}{1-x} \quad \text{für} \quad x \in (-1,1)$$

(b) Berechnen Sie nun die Ableitung derselben Funktion mittels der geometrischen Reihendarstellung:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{auf} \quad (-1,1)$$

Hinweis: *Benutzen Sie Satz 5.4.2.*

(c) Folgern Sie die Identität aus der Aufgabenstellung durch Kombinieren der vorherigen Berechnungen.

Lösung.

(a) Mit der Quotientenregel folgt für alle $|x| < 1$, da dort $1 - x \neq 0$:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(b) Wir bemerken, dass die Potenzreihe Konvergenzradius $\rho = 1$ hat. Tatsächlich

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} 1} = 1.$$

Daher folgt aus Satz 5.4.2, dass wir in $(-1,1)$ die Potenzreihe summandenweise ableiten dürfen und finden somit:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

wobei die Summation nun bei $n = 1$ beginnt, da konstante Funktionen Ableitung 0 besitzen.

(c) Benutzen wir die gefundene Identität für die Ableitung von $1/(1-x)$, so sehen wir, dass wenn wir beide Seiten mit x multiplizieren:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n,$$

wobei die Identität für alle $|x| < 1$ gilt.

11.2. Höhere Ableitungen und Taylor Reihen

(a) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ableitungen bis und mit 4-ter Ordnung

a) $f(x) := \cos(x)e^{\sin(x)}$

b) $f(x) := \log(1+x^2)$

c) $f(x) := e^x \cos(x) - x\sin(x)$

(b) Bestimmen Sie für jede der obigen Funktionen das Taylorpolynom zur Ordnung 4 um $x = 0$.

Lösung.

(a) a) Dank der Ketten- und Produktregel finden wir:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin(x)e^{\sin(x)} + \cos(x)^2 e^{\sin(x)} \\
&= (-\sin(x) + \cos(x)^2)e^{\sin(x)} \\
f''(x) &= -\cos(x)e^{\sin(x)} - \sin(x)\cos(x)e^{\sin(x)} - 2\cos(x)\sin(x)e^{\sin(x)} \\
&\qquad + \cos(x)^3 e^{\sin(x)} \\
&= (-\cos(x) - 3\cos(x)\sin(x) + \cos(x)^3)e^{\sin(x)} \\
f'''(x) &= (\sin(x) + 3\sin(x)^2 - 4\cos(x)^2 - 6\cos(x)^2\sin(x) + \cos(x)^4)e^{\sin(x)} \\
f^{(4)}(x) &= (1 + 15\sin(x) + 15\sin(x)^2 - 10\cos(x)^2 - 10\cos(x)^2\sin(x) \\
&\qquad + \cos(x)^4)\cos(x)e^{\sin(x)}
\end{aligned}$$

b) Wieder unter Verwendung der Ketten- und Produkt/Quotientenregel:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x}{1+x^2} \\
f''(x) &= -\frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2} \\
f'''(x) &= \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{12(x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)^4}
\end{aligned}$$

c) Wie in den vorherigen Teilaufgaben finden wir unter Verwendung der üblichen Rechenregeln zu Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (e^x - x)\cos(x) - (e^x+1)\sin(x) \\
f''(x) &= (x-2e^x)\sin(x) - 2\cos(x) \\
f'''(x) &= (3-2e^x)\sin(x) + (x-2e^x)\cos(x) \\
f^{(4)}(x) &= -x\sin(x) - 4(e^x-1)\cos(x)
\end{aligned}$$

(b) Das Taylorpolynom vierter Ordnung um $x = 0$ lässt sich leicht berechnen durch einsetzen von $x = 0$ in die oben berechneten Ableitungen:

$$T_4 f(x;0) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0) + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4.$$

a) Für $f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$ finden wir:

$$T_4 f(x;0) = 1 + \frac{1}{1!}x - \frac{3}{3!}x^3 - \frac{8}{4!}x^4 = 1 + x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^4$$

b) Für $f(x) = \log(1+x^2)$ finden wir:

$$T_4 f(x;0) = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{12}{4!}x^4 = x^2 - \frac{1}{2}x^4$$

c) Für $f(x) = e^x\cos(x) - x\sin(x)$ finden wir:

$$T_4 f(x;0) = 1 + \frac{1}{1!}x - \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2}{3!}x^3 = 1 + x - x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

11.3. Taylor Approximation.

Sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \cos(x)$$

Wir wollen f durch Taylor-Polynome $T_m f(x;a)$ in $a = 0$ approximieren. Hier ist m die Ordnung des Polynoms.

Wir wissen, dass (bis auf die ersten 12 Dezimalstellen) $\cos(0.2) = 0.980066577841$ ist. Was ist die kleinste Ordnung m, damit der Näherungsfehler an der Stelle $x = 0.2$ höchstens 10^{-10} ist?

Was ist in diesem Fall der Näherungsfehler an der Stelle $x = 1$?

Hinweis: *Mit Näherungsfehler an der Stelle x wird $|f(x) - T_m f(x;a)|$ gemeint.*

Lösung. Wir berechnen die Taylorpolynome $T_m f(x,0)$:

$$\begin{aligned}
&T_0 f(x,0) = 1;\\
&T_1 f(x,0) = 1;\\
&T_2 f(x,0) = 1 - \frac{1}{2}x^2;\\
&T_3 f(x,0) = 1 - \frac{1}{2}x^2;\\
&T_4 f(x,0) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;\\
&T_5 f(x,0) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;\\
&T_6 f(x,0) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6;
\end{aligned}$$

Die Näherungsfehler sind:

$$\begin{aligned}
&|\cos(0.2) - T_0 f(0.2,0)| = 0.019933422159;\\
&|\cos(0.2) - T_1 f(0.2,0)| = 0.019933422159;\\
&|\cos(0.2) - T_2 f(0.2,0)| = 6.6577841 \cdot 10^{-5};\\
&|\cos(0.2) - T_3 f(0.2,0)| = 6.6577841 \cdot 10^{-5};\\
&|\cos(0.2) - T_4 f(0.2,0)| = 8.8826 \cdot 10^{-8};\\
&|\cos(0.2) - T_5 f(0.2,0)| = 8.8826 \cdot 10^{-8};\\
&|\cos(0.2) - T_6 f(0.2,0)| = 6.3 \cdot 10^{-11};
\end{aligned}$$

Die kleinste Ordnung m, damit der Näherungsfehler in $x = 0.2$ höchstens 10^{-10} ist, ist $m = 6$. In diesem Fall ist $2.452809 \cdot 10^{-5}$ der Näherungsfehler in $x = 1$.

11.4. Grenzwerte und Taylorpolynome

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mithilfe einer Taylorapproximation:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1+2x^2}{x\sin(x)^3}$

(c) $\lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{x}}$

Lösung.

(a) Wir sehen dank der Restgliedformel:

$$\log(1+x) = x + xr(x),$$

wobei $r(x)$ gegen 0 konvergiert, wenn $x \to 0$. Somit gilt:

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{x+xr(x)}{x} = 1 + r(x),$$

und wir finden daher den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + r(x) = 1$$

(b) Da $\cos(2x)$ eine Potenzreihe ist, lässt sich das Taylorpolynom 4. Ordnung von $\cos(2x) - 1 - 2x^2$ leicht bestimmen:

$$\cos(2x) - 1 + 2x^2 = \frac{2^4}{4!}x^4 + x^4 r_1(x) = \frac{2}{3}x^4 + x^4 r_1(x),$$

wobei $r_1(x) \to 0$, falls $x \to 0$ dank der Restgliedformel für Taylorpolynome. Zudem gilt:

$$\sin(x) = x + xr_2(x),$$

und somit:

$$x\sin(x)^3 = x^4(1+r_2(x))^3,$$

wobei auch hier $r_2(x) \to 0$, wenn $x \to 0$. Daher können wir sehen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1+2x^2}{x\sin(x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + x^4 r_1(x)}{x^4(1+r_2(x))^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3} + r_1(x)}{(1+r_2(x))^3} = \frac{2}{3}$$

(c) Wir bemerken zuerst:

$$\cos(x)^{\frac{1}{x}} = \exp\Big(\frac{1}{x}\log(\cos(x))\Big)$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, reicht es den folgenden Grenzwert zu bestimmen:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{x}$$

Wir bestimmen das Taylorpolynom des Zählers: Der erste Koeffizient lässt sich durch Einsetzen bestimmen:

$$\log(\cos(0)) = \log(1) = 0,$$

Durch Ableiten finden wir zudem:

$$\Big(\log(\cos(x))\Big)' = -\frac{1}{\cos(x)}\sin(x)$$

Somit ist die Ableitung in $x = 0$ gerade 0. Daher folgt mittels der Restgliedformel:

$$\log(\cos(x)) = 0 + \frac{0}{1!}x + xr(x) = xr(x),$$

wobei $r(x) \to 0$ wenn $x \to 0$ dank der Taylorformel. Daher berechnen wir:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{xr(x)}{x} = \lim_{x\to 0} r(x) = 0,$$

und somit dank der Stetigkeit:

$$\lim_{x\to 0}\cos(x)^{\frac{1}{x}} = \exp(0) = 1$$

11.5. Extremalstellen

Bestimmen Sie die globalen Extremalstellen der folgenden Funktionen:

(a) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^3 - x^2 - 8x + 1,$

(b) $f : [-1, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x+1}{x^2+1},$

(c) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto (x - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$

Hinweis: *Man erinnere sich, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall stets sein Maximum und Minimum annimmt; entweder im Inneren oder an den Randpunkten des Intervalls.*

Lösung.

(a) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Dieses liegt entweder am Rand des Definitionsbereichs oder im Innern. Da f im Innern differenzierbar ist, muss es im letzteren Fall ein kritischer Punkt sein. Wir rechnen:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = (3x+4)(x-2) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left\{2,\ -\frac{4}{3}\right\}.$$

Die einzigen Kandidaten für globale Extremalstellen sind also die Randpunkte -2, 2 und der innere Punkt $-\frac{4}{3}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen lauten:

$$\begin{aligned} f(2) &= -11, \\ f(-\tfrac{4}{3}) &= \tfrac{203}{27} \approx 7.519, \\ f(-2) &= 5. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -\frac{4}{3}$, der kleinste der bei $x = 2$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -\frac{4}{3}$ und ein globales Minimum bei $x = 2$.

(b) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wenn es im Innern des Definitionsbereichs liegt, so muss es ein kritischer Punkt von f sein, da f dort differenzierbar ist. Wir rechnen:

$$f'(x) \quad = \quad \frac{1 \cdot (x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2} = 0.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt

$$-x^2 - 2x + 1 = 0,$$

also für

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Der Wert $-1-\sqrt{2} < -1$ liegt nicht im Definitionsintervall von f, der Wert $-1+\sqrt{2}$ dagegen schon. Die Kandidaten für globale Extremalstellen sind dieser kritische Punkt im Innern des Definitionsintervalls und die beiden Randpunkte, also $\left\{-1, -1+\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0, \\ f(-1+\sqrt{2}) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}+2} = \tfrac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \cdot \tfrac{4+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \tfrac{4(\sqrt{2}+1)}{8} = \tfrac{\sqrt{2}+1}{2} = 1.207\ldots, \\ f(\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{6}{5} = 1.2. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -1 + \sqrt{2}$, der kleinste der bei $x = -1$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -1 + \sqrt{2}$ und ein globales Minimum bei $x = -1$.

(c) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wir bestimmen die kritischen Punkte von f:

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + (x-1) \cdot (-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (1 + x - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

Wegen $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Die kritischen Punkte von f sind somit

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Beide Werte liegen im Innern des Definitionsintervalls. Die Kandidaten für globale Extremalstellen sind also die Randpunkte $x = -1$ und $x = 2$ sowie die kritischen Punkte $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned}
f(-1) &= -\tfrac{2}{\sqrt{e}} = -1.213\ldots, \\
f(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}) &= -\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}} = -1.336\ldots, \\
f(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}) &= \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{4}} = 0.166\ldots, \\
f(2) &= \tfrac{1}{e^2} = 0.135\ldots.
\end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, der kleinste der bei $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und ein globales Minimum bei $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

11.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 3 der Funktion f im Punkt 0?

$$f(x) := xe^x$$

(i) $x + x^2 + x^3$

(ii) $1 + x + x^2 + x^3$

(iii) $x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$

(iv) $1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$

(b) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion f im Punkt 1?

$$f(x) := x\log(x)$$

(i) $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4$

(ii) $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4$

(iii) $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4$

(iv) $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{3}(x-1)^4$

(c) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion f im Punkt 1?

$$f(x) := x\log(x)^4$$

(i) 0

(ii) $(x-1)^2$

(iii) $(x-1)^3$

(iv) $(x-1)^4$

Lösung.

(a) (iii)

(b) (i)

(c) (iv)