12.1. Partielle Integration

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration:

(a) $\int_1^2 x\ \log(x)\,dx,$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\cos(x)\,dx$

(c) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 4x\cos(2-3x)\,dx$

(d) $\int_0^3 (2+5x)e^{\frac{x}{3}}\,dx$

Hinweis: *Für b) dürfen Sie die folgende trigonometrische Identität benutzen*

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)).$$

Lösung.

(a)

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ \log(x)\,dx =& \frac{1}{2}x^2\log(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2\right)\frac{1}{x}dx\\ =&\frac{1}{2}4\log(2) - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx = 2\log(2) - \frac{3}{4}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\cos(x)\,dx =& x\frac{\sin^2(x)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(x)}{2}dx\\ =&\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos(2x))\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\frac{\sin(2x)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8},\end{aligned}$$

wobei wir $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 1 - 2\sin(x)^2$ verwendet haben.

(c)

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 4x\cos(2-3x)\,dx &= 4x\frac{\sin(2-3x)}{-3}\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 4\frac{\sin(2-3x)}{-3} \\ &= \frac{4}{9}\sin(1) + \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \sin(2-3x)dx \\ &= \frac{4}{9}\sin(1) + \frac{4}{9}\cos(2-3x)\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}(\sin(1)+1-\cos(1))\end{aligned}$$

(d)

$$\int_0^3 (2+5x)e^{\frac{x}{3}}\,dx = (2+5x)3e^{\frac{x}{3}}\Big|_0^3 - \int_0^3 5\cdot 3e^{\frac{x}{3}} = 51e - 6 - 15\cdot 3e^{\frac{x}{3}}\Big|_0^3 = 6e+39.$$

12.2. Substitutionsregel

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Substitutionsregel:

(a) $\int_{-2}^{2} (3x^2-9x)^4(6x-9)\,dx,$

(b) $\int_0^1 (3x-2x^3)e^{x^4-3x^2}\,dx$

(c) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)}\,dx$

Lösung.

(a) Wir substituieren

$$y(x) = 3x^2 - 9x,$$

dann gilt

$$y'(x) = 6x - 9,$$

deswegen

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} (3x^2-9x)^4(6x-9)\,dx = \int_{-2}^{2} y^4(x)y'(x)\,dx = \int_{y(-2)}^{y(2)} y^4\,dy = \frac{1}{5}y^5\Big|_{30}^{-6} \\ =\frac{1}{5}(-6^5-30^5) = \frac{-24307776}{5}\end{aligned}$$

(b) Wir substituieren

$$y(x) = x^4 - 3x^2,$$

dann gilt

$$y'(x) = 4x^3 - 6x,$$

deswegen

$$\begin{aligned}\int_0^1 (3x - 2x^3)e^{x^4-3x^2}\, dx &= -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{y(x)}y'(x)\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{y(0)}^{y(1)} e^y\, dy = -\frac{1}{2}e^y\Big|_0^{-2} \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-2}).\end{aligned}$$

(c) Wir substituieren

$$y(x) = 1 + x^2,$$

dann gilt

$$y'(x) = 2x,$$

deswegen

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy \\ &= \frac{1}{2}2\sqrt{y}\Big|_1^2 = \sqrt{2} - 1.\end{aligned}$$

(d) Wir substituieren

$$y(x) = \cos(x),$$

dann gilt

$$y'(x) = -\sin(x),$$

deswegen

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)}\, dx = -\int_1^{\cos\frac{\pi}{4}} \frac{1}{y^4} dy = \frac{1}{3}y^{-3}\Big|_1^{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-3} - 1\right) = \frac{1}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1).$$

12.3. Partialbruchzerlegung

Ziel dieser Aufgabe ist es, rationale Funktionen in einfachere Summanden zu zerlegen. Dies wird im Zusammenhang mit Integration ein wichtiges Hilfsmittel sein.

(a) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Bringen Sie beide Summanden auf einen gemeinsamen Nenner, dann können Sie aus der gewünschten Gleichheit **zwei** lineare Gleichungen in A, B folgern.

(b) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$.

(c) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + Cx + D,$$

wobei $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Verwenden Sie Polynomdivision mit Rest um den Grad des Zählers auf 1 zu reduzieren.

(d) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2},$$

wobei $A, B, C \in \mathbb{R}$. Vergewissern Sie sich, dass alle drei Summanden notwendig in der Zerlegung sind (d.h. $A, B, C \neq 0$).

Hinweis: Sie müssen nur eine geeignete Formulierung geben, diese aber nicht beweisen.

(e) Benutzen Sie Partialbruchzerlegungen, um die Stammfunktionen der folgenden Funktionen zu bestimmen:

- $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$
- $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$
- $\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$
- $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$

Lösung.

(a) Bringen wir beide Summanden auf einen gemeinsamen Nenner, so sehen wir:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-2)}{(x-1)(x-2)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - (2A+B)}{(x-1)(x-2)}$$

Die gesuchten Konstanten A, B müssen also das folgende lineare Gleichungssystem erfüllen:

$$A + B = 0, \quad 2A + B = -1$$

Direktes Ausrechnen zeigt:

$$A = -1, \quad B = 1$$

Somit gilt also:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

(b) Wir gehen gleich vor, wie bei der letzten Teilaufgabe, und finden:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - (2A+B)}{(x-1)(x-2)}$$

Somit sind die gesuchten Gleichungen:

$$A + B = 1, \quad 2A + B = -1$$

Auflösen ergibt:

$$A = -2, \quad B = 3$$

Daher ist die gesuchte Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

(c) Wie im Hinweis verwenden wir zuerst Polynomdivision, um die Zerlegung zu vereinfachen. Hierzu bemerken wir:

$$x^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 2) + 7x - 6.$$

Dies lässt sich einfach aus einer Division mit Rest herauslesen. Daher gilt:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x+3)(x-1)(x-2) + 7x - 6}{(x-1)(x-2)} = x + 3 + \frac{7x-6}{(x-1)(x-2)}$$

Somit ist $C = 1$ und $D = 3$. Wir wollen also noch A, B finden mit

$$\frac{7x-6}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Wir gehen vor wie bereits in den vorherigen Teilaufgaben und finden das System:

$$A + B = 7, \quad 2A + B = 6$$

Somit muss gelten:

$$A = -1, \quad B = 8$$

Daher haben wir die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = x + 3 - \frac{1}{x-1} + \frac{8}{x-2}$$

(d) Wir finden durch Erweitern:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-4A - 3B + C)x + (4A + 2B - C)}{(x-1)(x-2)^2}$$

Das gesuchte Gleichungssystem ist hier also:

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 0 &= -4A - 3B + C \\ 1 &= 4A + 2B - C \end{aligned}$$

Auflösen zeigt sofort:

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 1$$

Somit haben wir:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$$

Da alle drei Konstanten $\neq 0$ sind, folgt, dass alle drei Summanden nötig waren.

(e) Einer der grossen Nutzen von Partialbruchzerlegungen besteht darin, dass sie die Bestimmung von Stammfunktionen signifikant vereinfachen:

- Aus der ersten Teilaufgabe wissen wir:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

  Da $\log(x)$ eine Stammfunktion zu $1/x$ ist, finden wir:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\, dx = -\log(|x-1|) + \log(|x-2|) + C,$$

  für eine beliebige Konstante $C \in \mathbb{R}$. Man beachte, dass der Absolutbetrag verwendet wird, damit wir überall auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ eine Stammfunktion haben.

- Aus der zweiten Teilaufgabe wissen wir:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

  Somit folgt, analog zu vorhin:

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}\, dx = -2\log(|x-1|) + 3\log(|x-2|) + C,$$

  für eine beliebiges $C \in \mathbb{R}$.

- Dank unserer Partialbruchzerlegung wie oben gilt:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = x + 3 - \frac{1}{x-1} + \frac{8}{x-2},$$

  und daher:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}\, dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \log(|x-1|) + 8\log(|x-2|) + C,$$

  für ein beliebiges $C \in \mathbb{R}$.

- Aus der obigen Berechnung gilt:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2},$$

und daher sind die Stammfunktionen gegeben durch:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}\, dx = \log(|x-1|) - \log(|x-2|) - \frac{1}{x-2} + C,$$

für ein beliebiges $C \in \mathbb{R}$.

12.4. Integrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

(a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^3 - x}\, dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{4x-2}{x^2-2x-63}\, dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x+2)^2}\, dx,$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-9)^2}\, dx,$

Lösung.

(a) Wir machen den Ansatz

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{\omega_1}{x} + \frac{\omega_2}{x+1} + \frac{\omega_3}{x-1}$$

und erhalten

$$\omega_1(x^2-1) + \omega_2 x(x-1) + \omega_3 x(x+1) = 1\,,$$

d.h.

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0\,, \\ -\omega_2 + \omega_3 = 0\,, \\ -\omega_1 = 1\,. \end{cases}$$

Die Lösungen des Systems sind

$$\omega_1 = -1\,,\ \ \omega_2 = \frac{1}{2}\,,\ \ \omega_3 = \frac{1}{2}\,,$$

und deshalb erhalten wir

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{dx}{x^3-x} &= -\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx \\
&= -\log x\Big|_{x=2}^{x=3} + \frac{1}{2}\log(x+1)\Big|_{x=2}^{x=3} + \frac{1}{2}\log(x-1)\Big|_{x=2}^{x=3} \\
&= -\log\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\log 2 \\
&= \log\frac{2}{3} + \log\frac{2}{\sqrt{3}} + \log\sqrt{2} = \log\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}\right) \\
&= \log\sqrt{\frac{32}{27}}
\end{aligned}$$

(b) Für den Nenner gilt

$$x^2 - 2x - 63 = (x+7)(x-9)$$

und daher bestimmen wir A, B so dass

$$\frac{4x-2}{(x+7)(x-9)} = \frac{A}{x-9} + \frac{B}{x+7}.$$

Wir erhalten

$$4x - 2 = A(x+7) + B(x-9).$$

Einsetzen von $x = -7$, bzw. $x = 9$ liefert

$$-30 = -16B \quad \Rightarrow B = 15/8$$

und

$$34 = 16\cdot A \quad \Rightarrow A = 17/8.$$

Also gilt

$$\frac{4x-2}{x^2-2x-63} = \frac{17/8}{x-9} + \frac{15/8}{x+7}.$$

Das Integral ist damit

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x-2}{x^2-2x-63}\,dx &= \int \frac{17/8}{x-9}dx + \int \frac{15/8}{x+7}\,dx \\
&= \frac{17}{8}\log(|x-9|) + \frac{15}{8}\log(|x+7|) + C.
\end{aligned}$$

(c) Wir verwenden eine Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}\,.$$

Das liefert nun

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{ax+2a+b}{(x+2)^2}$$

und somit das System

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a+b = 1\,. \end{cases}$$

d.h. $a = 2$ und $b = -3$. Wir bekommen deshalb

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{2}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{(x+2)^2}\,dx &= \int \frac{2}{x+2}\,dx - \int \frac{3}{(x+2)^2}\,dx \\ &= 2\log|x+2| + \frac{3}{x+2} + C. \end{aligned}$$

(d) Wir faktorisieren den Nenner und bekommen

$$(x^2-9)^2 = ((x-3)(x+3))^2 = (x-3)^2(x+3)^2\,.$$

Weil die Nullstellen 3 und -3 Multiplizität 2 besitzen, folgt, dass wir den Ansatz

$$\frac{x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2}$$

machen müssen, wobei $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ zu bestimmen sind.

Somit erhalten wir

$$\frac{A(x-3)(x+3)^2 + B(x+3)^2 + C(x-3)^2(x+3) + D(x-3)^2}{(x-3)^2(x+3)^2} = \frac{x^2}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

und

$$(A+C)x^3 + (3A+B-3C+D)x^2 + (-9A+6B-9C-6D)x + (-27A+9B+27C+9D) = x^2\,,$$

was uns das System

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 3A + B - 3C + D = 1 \\ -9A + 6B - 9C - 6D = 0 \\ -27A + 9B + 27C + 9D = 0 \end{cases}$$

liefert. Das System besitzt die Lösung

$$A = \frac{1}{12},\ B = \frac{1}{4},\ C = -\frac{1}{12},\ D = \frac{1}{4}$$

und deshalb ist die gesuchte Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{1}{12(x-3)} + \frac{1}{4(x-3)^2} - \frac{1}{12(x+3)} + \frac{1}{4(x+3)^2}\ .$$

Mit der Partialbruchzerlegung folgt:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2-9)^2}\,dx &= \int \frac{1}{12(x-3)}\,dx + \int \frac{1}{4(x-3)^2}\,dx \\ &\quad - \int \frac{1}{12(x+3)}\,dx + \int \frac{1}{4(x+3)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{12}\log(|x-3|) - \frac{1}{4(x-3)} \\ &\quad - \frac{1}{12}\log(|x+3| - \frac{1}{4(x+3)} + C \end{aligned}$$

12.5. Variation der Konstanten

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen, indem Sie zuerst eine homogene Lösung finden und dann Variation der Konstanten anwenden.

(a) $y' - 3y = e^{5x}$,

(b) $y' - 3y = e^{3x}$,

(c) $y' - y = \sin x$,

(d) $y' - \frac{y}{x} = x$.

Lösung.

(a) Die homogene Lösung, also die Lösung von $y'_{\text{hom}} - 3y_{\text{hom}} = 0$, ist

$$y_{\text{hom}}(x) = Ce^{3x}.$$

Wir nehmen als Ansatz für die Lösung der vollen Differentialgleichung:

$$y(x) = C(x)e^{3x}.$$

Die Ableitung ist

$$y'(x) = C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x}.$$

Setzen wir dies in die ursprügnliche Differentialgleichung ein, bekommen wir:

$$C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x} - 3C(x)e^{3x} = e^{5x},$$

also

$$C'(x)e^{3x} = e^{5x},$$

und schliesslich

$$C'(x) = e^{2x}.$$

Deshalb ist

$$C(x) = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + K, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung ist also

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + K\right)e^{3x} = \frac{1}{2}e^{5x} + Ke^{3x}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

(b) Die homogene Lösung ist wieder $y_{\text{hom}}(x) = Ce^{3x}$ und als Ansatz nehmen wir $y(x) = C(x)e^{3x}$. Nach Einsetzen und Ableiten erhalten wir

$$C'(x) = 1 \implies C = x + K, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung ist also

$$y(x) = xe^{3x} + Ke^{3x}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

(c) Die homogene Lösung ist $y_{\text{hom}}(x) = Ce^x$. Als Ansatz nehmen wir $y(x) = C(x)e^x$. Nach Einsetzen und Ableiten erhalten wir

$$C'(x) = \sin(x)e^{-x}.$$

Zweichfache partielle Integration ergibt:

$$C(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + K, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung ist also

$$y(x) = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + Ke^x, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

(d) Die homogene Lösung erhalten wir durch Separation der Variablen:

$$y' = \frac{y}{x}$$

wird

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}.$$

Also muss gelten $\log|y| = \log|x| + C$. Durch exponenzieren auf beiden Seiten der Gleichung, sehen wir

$$y = Bx, \qquad B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Beachten Sie, dass $y = 0$ auch eine Lösung ist. Also ist

$$y_{\text{hom}}(x) = Cx, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

die homogene Lösung.

Als Ansatz nehmen wir $y(x) = C(x)x$. Nach Einsetzen und Ableiten erhalten wir

$$C'(x) = 1 \implies C(x) = x + K, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung ist:

$$y(x) = x^2 + Kx, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

12.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche der folgenden Rechnungen ist keine korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(i) $\int \sin(\phi)\cos(\phi)\,d\phi = -\cos(\phi)\cos(\phi) - \int \cos(\phi)\sin(\phi)\,d\phi$.

(ii) $\int \sin(\phi)\cos(\phi)\,d\phi = \sin(\phi)\sin(\phi) - \int \cos(\phi)\sin(\phi)\,d\phi$.

(iii) $\int x\log(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x}{2}\,dx$.

(iv) $\int 2x^2 e^{x^2}\,dx = xe^{x^2} - \int e^{x^2}\,dx$.

(v) Alle sind korrekte Anwendungen der partiellen Integration.

(b) Welche Substitution vereinfacht das folgende Integral:

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}\,dx$$

(i) $y = \sin(x)$

(ii) $y = \cos(x)$

(iii) $y = 1 + \sin(x)^2$

(iv) Keine der obigen.

(c) Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_2^3 \frac{1}{x\log(x)}dx$$

(i) $-\frac{5}{36}$

(ii) $\frac{1}{2}(\log^2(3) - \log^2(2))$

(iii) $\log\left(\frac{\log(3)}{\log(2)}\right)$

(iv) $\arctan(\log(3)) - \arctan(\log(2))$

(d) Wählen Sie die Stammfunktion zu der folgenden Funktion aus:

$$\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}$$

(i) $\arctan(\sin(x)) + c$

(ii) $\arccos(\sin(x)) + c$

(iii) $\log(\sin(x)) + c$

(iv) $\log(\tan(x)) + c$

(e) Wählen Sie die Stammfunktion zu der folgenden Funktion aus:

$$\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$$

(i) $\arctan(\sin(x)) + c$

(ii) $\arctan(1+\sin(x)) + c$

(iii) $\log(\sin(x)) + c$

(iv) $\log(1+\sin(x)) + c$

Lösung.

(a) (v)

(b) (i)

(c) (iii)

(d) (i)

(e) (iv)