13.1. Integrale berechnen per Definition

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die folgende Treppenfunktion:

$$f_n(x) = \frac{k^2}{n^2} \quad \forall x \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad \forall k \in \{1, ..., n\}.$$

Erklären Sie, warum

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x^2.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2.$$

(c) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

und schliessen Sie daraus, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}.$$

(d) Schliessen Sie aus den obigen Teilaufgaben, dass

$$\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}.$$

(e) Berechnen Sie mittels Riemannscher Summen das Integral

$$\int_0^1 x^3 dx$$

Hinweis: *Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Lösung.

(a) Da x^2 stetig ist, folgt die Konvergenz aus Satz 6.2.3. Dafür müssen wir nur zeigen, dass die Feinheit der Zerlegungen gegen 0 konvergiert. Tatsächlich gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, und für jedes $k \in \{1, ..., n\}$

$$\left|\left(\frac{k-1}{n} - \frac{k}{n}\right]\right| = \frac{k-(k-1)}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^1 f_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{k^2}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2$$

(c) Für $n = 1$ ist die Aussage klar. Angenommen, die Aussage stimmt für $n = N$, dann finden wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N+1} k^2 = \sum_{k=1}^{N} k^2 + (N+1)^2 &= \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) + (N+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(N+1)(2N^2+7N+6) = \frac{1}{6}(N+1)(N+2)(2N+3).\end{aligned}$$

Wir schliessen mittels Induktion, dass die Aussage für jedes $n \in \mathbb{N}$ stimmt. Insbesonders $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}.$$

(d) Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{3}$$

schliessen wir aus (a) und (c), dass

$$\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}.$$

(e) Wir wählen die Treppenfunktionen $f_n(x)$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{1, \ldots n\}$ gilt:

$$f_n(x) = \frac{k^3}{n^3} = \left(\frac{k}{n}\right)^3, \quad \forall x \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right],$$

Dann gilt wie oben:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^4} = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^n k^3$$

Mittels vollständiger Induktion zeigt man

$$\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}{n^4}.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}{n^4} = \frac{1}{4},$$

folgern wir:

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$$

13.2. Uneigentliche Integrale

Sei f Riemann-integrabel. Sei $a \in \mathbb{R}$. Falls der Grenzwert

$$\lim_{r\to\infty}\int_a^r f(x)dx$$

existiert, schreibt man

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{r\to\infty}\int_a^r f(x)dx,$$

und dieser Grenzwert wird uneigentliches Integral genannt.

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale, oder erklären Sie, warum der entsprechende Grenzwert nicht existiert.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}dx.$

Lösung.

(a) Für jedes $r \in (1,\infty)$ gilt

$$\int_1^r \frac{1}{x^4}dx = \frac{-1}{3}\frac{1}{x^3}\bigg|_1^r = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{r^3}-1\right).$$

Deswegen finden wir für den Grenzwert

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}dx = \lim_{r\to\infty} -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{r^3}-1\right) = \frac{1}{3}.$$

(b) Für jedes $r \in (0, \infty)$ erhalten wir mit der Substitution $y = x^2$

$$\int_0^r xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{r^2} e^{-y} dy = -\frac{1}{2} e^{-y} \Big|_0^{r^2} = -\frac{1}{2}(e^{-r^2} - 1).$$

Deswegen finden wir für den Grenzwert

$$\int_0^\infty xe^{-x^2} dx = \lim_{r \to \infty} -\frac{1}{2}(e^{-r^2} - 1) = \frac{1}{2}.$$

(c) Für jedes $r \in (0, \infty)$ erhalten wir mit der Substitution $y = x^2$

$$\int_0^r \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{r^2} \frac{1}{y + 1} dy = \frac{1}{2} \log(y + 1) \Big|_0^{r^2} = \frac{1}{2} \log(r^2 + 1).$$

Da

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{2} \log(r^2 + 1) = \infty$$

konvergiert das uneigentliche Integral nicht.

13.3. Ableiten von Parameterintegralen

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktion:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t) := \int_0^{\sin(t)} e^{-x^2}\, dx$$

Hinweis: Benutzen Sie den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung sowie die Kettenregel.

Lösung.

Wir schreiben:

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad G(t) := \int_0^t e^{-x^2}\, dx$$

Gemäss dem Hauptsatz ist G differenzierbar mit Ableitung:

$$G'(t) = e^{-t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Wir bemerken nun, dass

$$F(t) = \int_0^{\sin(t)} e^{-x^2}\, dx = G(\sin(t)).$$

Somit gilt gemäss der Kettenregel:

$$F'(t) = \cos(t)G'(\sin(t)) = \cos(t)e^{-\sin(t)^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

13.4. Konvergenz von Reihen via Integrale

Ziel dieser Aufgabe ist es, das Konvergenzverhalten gewisser Reihen durch Integrale zu bestimmen. Für diese Aufgabe sei:

$$f : [1, \infty) \to \mathbb{R},$$

eine monoton fallende stetige Funktion, sodass für alle $x \in [1, \infty)$ gilt:

$$f(x) \geq 0$$

(a) Wir definieren zwei Treppenfunktionen $f_1, f_2 : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ wie folgt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$, setzen wir auf dem Intervall $[n, n+1)$

$$f_1(x) = f(n+1), \quad f_2(x) = f(n), \quad \forall x \in [n, n+1)$$

Zeigen Sie, dass für beliebiges $R \in [1, \infty)$ gilt:

$$\int_1^R f_1(x)\, dx \leq \int_1^R f(x)\, dx \leq \int_1^R f_2(x)\, dx$$

(b) Sei nun $N \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die folgenden Integrale explizit:

$$\int_1^N f_1(x)\, dx, \quad \int_1^N f_2(x)\, dx$$

(c) Wir betrachten nun das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty f(x)\, dx := \lim_{R\to\infty} \int_1^R f(x)\, dx.$$

Zeigen Sie, dass dieses uneigentliche Integral genau dann konvergiert (das heisst der Grenzwert oben existiert), wenn die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^\infty f(n).$$

(d) Bestimmen Sie alle Exponenten $s \in \mathbb{R}$, sodass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)\log(n+1)^s}$$

Lösung.

(a) Sei $x \in [1, \infty)$ beliebig. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $x \in [n, n+1)$. Nun gilt

$$f_1(x) = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = f_2(x),$$

da $n + 1 \geq x \geq n$ und f eine monoton fallende Funktion ist. Wir haben also gezeigt, dass

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x), \quad \forall x \in [1, \infty).$$

Dank der Monotonie des Integrals, angewandt auf das Intervall $[1, R]$, gilt somit auch

$$\int_1^R f_1(x)\, dx \leq \int_1^R f(x)\, dx \leq \int_1^R f_2(x)\, dx.$$

(b) Auf dem Intervall $[1, N)$ kann man die beiden Treppenfunktionen schreiben als

$$f_1 = \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1)\chi_{[n,n+1)}, \qquad f_2 = \sum_{n=1}^{N-1} f(n)\chi_{[n,n+1)},$$

wobei $\chi_{[n,n+1)}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[n, n+1)$. Somit gilt gemäss Definition 6.2.1 im Skript:

$$\int_1^N f_1(x)\, dx = \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) \left|[n, n+1)\right| = \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) = \sum_{n=2}^{N} f(n),$$

und

$$\int_1^N f_2(x)\, dx = \sum_{n=1}^{N-1} f(n) \left|[n, n+1)\right| = \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

(c) Aus den vorherigen Teilaufgaben schliessen wir, dass für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)\, dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1, \infty)$, sind sowohl das Integral oben, wie auch die Summen, monoton wachsend in N. Um die Konvergenz zu zeigen, müssen wir also nur die Beschränktheit dieser Folgen zeigen (da jede beschränkte monoton wachsende Folge konvergiert). Nehmen wir nun an, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent ist, also $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$. Dann gilt dank der Abschätzung oben

$$\int_1^N f(x)\, dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty,$$

also bleibt das Integral beschränkt wenn $N \to \infty$ und das uneigentliche Integral konvergiert somit. Umgekehrt, falls das uneigentliche Integral existiert, also $\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$, dann finden wir dank der Abschätzen oben

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \leq f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx < \infty,$$

also bleibt die Summe beschränkt wenn $N \to \infty$ und die Reihe konvergiert somit.

Dieses Ergebnis kann sehr nützlich sein, um die Konvergenz von Reihen zu zeigen. Wir bemerken, dass diese Aufgabe im Übrigen die folgende Abschätzung für die Reihe liefert:

$$\int_1^\infty f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^\infty f(x).$$

(d) Wir können die Reihe schreiben als $\sum_{n=1}^\infty f(n)$, wobei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ die folgende Funktion ist

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\log(x+1)^s}.$$

Gemäss der vorherigen Teilaufgabe konvergiert die Reihe genau dann wenn das uneigentliche Integral dieser Funktion konvergiert. Wir berechnen das Integral mittels einer Substitution $y = \log(x+1)$:

$$\begin{aligned}\int_1^R \frac{1}{(x+1)\log(x+1)^s} &= \int_{\log(2)}^{\log(R+1)} \frac{1}{y^s} = -\frac{1}{s-1}\frac{1}{y^{s-1}}\Big|_{\log(2)}^{\log(R+1)} \\ &= \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{\log(2)^{s-1}} - \frac{1}{\log(R+1)^{s-1}}\right)\end{aligned}$$

Somit konvergiert das uneigentliche Integral genau dann wenn

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\log(R+1)^{s-1}}$$

existiert, was genau dann der Fall ist wenn $s > 1$. Man bemerke, dass der Grenzfall $s = 1$ in den Berechnungen oben nicht abgedeckt ist. Für $s = 1$ gilt ähnlich wie oben

$$\int_1^R \frac{1}{(x+1)\log(x+1)} = \log(\log(R+1)) - \log(\log(2)),$$

und $\log(\log(R+1))$ divergiert gegen unendlich wenn $R \to \infty$.

13.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(i)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ii)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

(iii)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

(iv) Alle Aussagen sind falsch.

(b) Sei $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(i)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ii)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

(iii)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

(iv) Alle Aussagen sind falsch.

(c) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter sei $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $g_n(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [0,1]$ und $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $h_n(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [0,1]$. Falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n(x)\,dx,$$

dann ist f Riemann-integrabel.

(i) Wahr

(ii) Flasch

Lösung.

(a) (i)

(b) (iii)

(c) (i)