

0.1. Kreise und Geraden in der komplexen Ebene

Wir erinnern uns, dass ein *Kreis* in der Ebene \mathbb{R}^2 gegeben ist durch eine Gleichung der Form:

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2,$$

wobei alle (x, y) , welche diese Identität erfüllen, auf dem Kreis mit Mittelpunkt (m_x, m_y) und Radius r liegen. Eine *Gerade* ist hingegen gegeben durch:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0,$$

wobei alle (x, y) , welche die Identität erfüllen, auf einer Gerade liegen mit Steigungsvektor $(-b, a)$ und c die Entfernung zum Ursprung parametrisiert. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine einheitliche Beschreibung von Geraden und Kreisen in der komplexen Ebene zu erhalten.

- (a) Nutzen Sie die Zerlegung von komplexen Zahlen in Real- und Imaginärteil, um zu beweisen, dass die folgenden Gleichungen Kreise bzw. Geraden in der Ebene darstellen:

(i.) $|z|^2 - 1 = 0$

(ii.) $|z|^2 - iz + i\bar{z} = 0$

(iii.) $|z|^2 - iz + i\bar{z} - 2 = 0$

(iv.) $-iz + i\bar{z} + 1 = 0$

Skizzieren Sie die Mengen.

- (b) Beweisen Sie durch Umformen der Identität und unter der Verwendung des Real- und Imaginärteils von z , dass die folgende Identität:

$$a|z|^2 + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0,$$

einen Kreis (für $a \neq 0$) bzw. eine Gerade (für $a = 0$) parametrisiert. Dabei ist b eine beliebige komplexe Zahl und a, c reelle Zahlen mit $|b|^2 - ac > 0$. Gilt auch die Umkehrung, d.h. lassen sich alle Kreise und Geraden in der Ebene durch eine solche Identität beschreiben?

- (c) Verwenden Sie die Darstellung aus der vorherigen Teilaufgabe, um zu zeigen, dass die Inversionsabbildung, welche z seine Inverse z^{-1} zuordnet, Kreise und Geraden mit dem Koeffizienten $c \neq 0$ auf Kreise und Geraden abbildet. Denken Sie darüber nach, was im Falle eines Kreises bzw. einer Geraden mit $c = 0$ passiert.

Lösung.

(a) (i.) Es gilt:

$$|z|^2 = x^2 + y^2,$$

wenn $z = x + iy$. Also ist die Menge $|z|^2 - 1 = 0$ gerade:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Die gesuchte Menge ist also der Kreis mit Radius 1 um den Ursprung.

(ii.) Wählen wir $z = x + iy$, so wird die Gleichung zu:

$$x^2 + y^2 + 2y = 0.$$

Durch quadratische Ergänzung lässt sich dies umformen zu

$$x^2 + (y + 1)^2 - 1 = 0,$$

oder umgeordnet:

$$x^2 + (y + 1)^2 = 1.$$

Also ist die Menge gerade der Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, -1)$.

(iii.) Wir zuvor reduziert sich die Gleichung zu:

$$x^2 + (y + 1)^2 - 3 = 0,$$

also:

$$x^2 + (y + 1)^2 = 3$$

Dies beschreibt gerade den Kreis mit Mittelpunkt $(0, -1)$ und Radius $\sqrt{3}$.

(iv.) Direktes Einsetzen von $z = x + iy$ liefert:

$$-iz + i\bar{z} + 1 = 2y + 1 = 0$$

Dies beschreibt genau die Gerade $y = -1/2$ parallel zur x -Achse.

(b) Setzen wir $z = x + iy$ ein, so können wir die Identität umformen zu:

$$a|z|^2 + \bar{b}z + b\bar{z} + c = a(x^2 + y^2) + 2(b_1x + b_2y) + c = 0,$$

wobei wir $b = b_1 + b_2i$ verwendet haben mit b_1, b_2 reell.

Wir nehmen zuerst an, dass $a \neq 0$. Dann lässt sich die Gleichung oben schreiben als:

$$a\left(x + \frac{b_1}{a}\right)^2 - \frac{b_1^2}{a} + a\left(y + \frac{b_2}{a}\right)^2 - \frac{b_2^2}{a} + c = 0,$$

oder auch:

$$\left(x + \frac{b_1}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{b_2}{a}\right)^2 = \frac{|b|^2 - ac}{a^2}$$

Die Bedeutung von $|b|^2 > ac$ wird hierbei klar, denn:

$$\frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|} > 0,$$

ist genau der Radius des Kreises um $(-b_1/a, -b_2/a)$ welchen die vorgegebene Gleichung beschreibt. Somit haben wir gesehen, dass für $a \neq 0$ die Gleichung ein Kreis beschreibt. Umgekehrt ist klar aufgrund der expliziten Formeln für Mittelpunkt und Radius, dass jeder Kreis sich in dieser Form schreiben lässt.

Wir behandeln nun den Fall $a = 0$. Dann muss wegen $|b|^2 - ac > 0$ gelten $|b| \neq 0$, also $b \neq 0$. Man sieht sofort, dass:

$$\bar{b}z + b\bar{z} + c = 2(b_1x + b_2y) + c = 2b_1 \cdot x + 2b_2 \cdot y + c = 0,$$

unter Verwendung derselben Methoden wie oben. Dank der Einführung in die Aufgabe wissen wir, dass eine solche Menge eine Gerade ist und jede Gerade diese Form besitzt. Somit haben wir die Aufgabe gelöst.

(c) Wir wissen, dass:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Teilen wir also die Gleichung für eine Gerade oder einen Kreis mit $c \neq 0$ (dann ist $z = 0$ keine Lösung der Gleichung) durch $|z|^2$, so sehen wir:

$$a + \bar{b} \frac{z}{|z|^2} + b \frac{\bar{z}}{|z|^2} + c \frac{1}{|z|^2} = a + \overline{bz^{-1}} + bz^{-1} + c|z^{-1}|^2 = 0,$$

zumindest für $z \neq 0$. Falls also z die Gleichung

$$a|z|^2 + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0 \tag{1}$$

erfüllt, dann erfüllt z^{-1} die Gleichung

$$c|z^{-1}|^2 + bz^{-1} + \overline{bz^{-1}} + a = 0. \tag{2}$$

Dies zeigt, dass alle Punkte z auf dem Kreis oder der Gerade gegeben durch die Gleichung (1) von der Abbildung $z \rightarrow z^{-1}$ auf den Kreis gegeben durch die Gleichung (2) abgebildet werden (das Bild ist ein Kreis, da $c \neq 0$ per Annahme).

Falls $c = 0$, so liegt $z = 0$ in der Menge der Lösungen. Wenn wir $z \neq 0$ betrachten, so sehen wir analog zu oben:

$$a + \overline{bz^{-1}} + bz^{-1} = 0$$

Daher liegen alle $z \neq 0$ weiterhin auf einer Geraden. Für diejenigen, die die Riemann-Sphäre kennen, kann das Verhalten in ∞ ergänzt werden um zu sehen, dass sich die Aussage in 0 und ∞ fortsetzen lassen.

0.2. Konvergenzverhalten von Potenzreihen

(a) Betrachten Sie die Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius R und bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = R$ die Potenzreihe konvergiert.

(b) Betrachten Sie die Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius R und bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = R$ die Potenzreihe konvergiert.

(c) Betrachten Sie die Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius R und bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = R$ die Potenzreihe konvergiert.

Lösung. Wir verwenden hier die Formel für den Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, welche aus dem Wurzelkriterium folgt, nämlich,

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Der Konvergenzradius kann alternativ auch mit dem Quotientenkriterium berechnet werden.

(a) Zunächst bemerken wir, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \sqrt[n]{1} = 1,$$

deswegen ist der Konvergenzradius der Reihe gleich 1.

Das heisst, die Potenzreihe konvergiert für alle $x \in (-1, 1)$ und divergiert für alle $|x| > 1$. Die Randwerte $x = 1$ und $x = -1$ müssen separat behandelt werden. Für $x = 1$ bekommen wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1$. Da die konstante Folge 1 keine Nullfolge ist, kann die Reihe nicht konvergent sein. Für $x = -1$ bekommen wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. Die Folge $(-1)^n$ ist wieder keine Nullfolge, und die Reihe konvergiert deshalb nicht.

(b) Wir bemerken, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log(\frac{1}{n})}.$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, gilt für den Limes also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \log(\frac{1}{n})} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\frac{1}{n})} = e^0 = 1,$$

und daher ist der Konvergenzradius der Reihe $\frac{1}{1} = 1$. Wobei wir verwendet haben, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \log(x) = 0.$$

Die beiden Randwerte weisen unterschiedliches Konvergenzverhalten auf. Für $x = 1$ bekommen wir die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Diese ist nicht konvergent, siehe Beispiel 3.5.1 i) im Skript. Für $x = -1$ bekommen wir die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Diese Reihe ist konvergent, siehe Beispiel 3.5.1 ii) im Skript.

(c) Wie oben berechnen wir $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{2}{n} \log(\frac{1}{n})}.$$

Deswegen gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \log(\frac{1}{n})} = e^0 = 1,$$

und somit ist der Konvergenzradius der Reihe gleich 1.

Man beachte, dass für $|x| = 1$ gilt:

$$\left| \frac{x^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2},$$

und da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, siehe Beispiel 3.7.4 ii) im Skript, folgt, dass die Potenzreihe überall auf dem Rand absolut konvergiert.

0.3. Grenzwerte Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{2^x - 1}$$

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1) - x}{\cos(x) - 1}$$

(e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+2) - \log(n)}{\log(n+1) - \log(n)}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \sin(x))^{\frac{1}{\tan(x)}}$$

(f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$$

Hinweis: Betrachten Sie in der letzten Teilaufgabe die Summe als Riemann-Summe.

Lösung.

(a) Wir bemerken, dass $\lim_{x \rightarrow 0} (3^x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} (2^x - 1) = 0$, also verwenden wir den Satz von Bernoulli-de L'Hôpital. Für die Ableitungen gilt

$$(a^x)' = (e^{x \log(a)})' = \log(a) e^{x \log(a)} = \log(a) a^x,$$

wobei $a > 0$ beliebig. Also gilt gemäss Bernoulli-de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{2^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x - 1)'}{(2^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(3) 3^x}{\log(2) 2^x} = \frac{\log(3)}{\log(2)}$$

(b) Dieser Limes lässt sich mit einer doppelten Anwendung des Satzes von Bernoulli-de L'Hôpital berechnen. Seien

$$f(x) = \log(x+1) - x \quad \text{und} \quad g(x) = \cos(x) - 1$$

Dann gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1, \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

und

$$g'(x) = -\sin(x), \quad g''(x) = -\cos(x).$$

Wir finden $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = g'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $g''(0) = -1$. Aus dem Satz von Bernoulli-de L'Hôpital (angewendet auf f', g') folgt, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{f''(0) - 1}{g''(0) - 1} = 1.$$

Wendet man nun den Satz von Bernoulli-de L'Hôpital auf f, g an, so erhält man

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1.$$

(c) Es gilt

$$(1 + 2 \sin(x))^{\frac{1}{\tan(x)}} = e^{\frac{\log(1+2 \sin(x))}{\tan(x)}}.$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, gilt für jede Funktion f , falls der Limes $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert,

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)}.$$

Wir betrachten deshalb den Limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 2 \sin(x))}{\tan(x)}.$$

Da $\lim_{x \rightarrow 0} \log(1 + 2 \sin(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) = 0$, kann eine Anwendung des Satzes von Bernoulli-de L'Hôpital hilfreich sein. Wir berechnen

$$(\log(1 + 2 \sin(x)))' = \frac{2 \cos(x)}{1 + 2 \sin(x)}, \quad \tan(x)' = 1 + \tan(x)^2.$$

Also finden wir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 2 \sin(x))}{\tan(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x)}{(1 + 2 \sin(x))(1 + \tan(x))^2} = 2.$$

Damit gilt für den ursprünglichen Limes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \sin(x))^{\frac{1}{\tan(x)}} = e^2.$$

(d) Wir verwenden eine Taylor-Entwicklung, um diesen Grenzwert zu berechnen. Es gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \arctan''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad \arctan'''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2)^3}.$$

Ausgewertet an der Stelle $x = 0$ finden wir

$$\arctan(0) = 0, \quad \arctan'(0) = 1, \quad \arctan''(0) = 0, \quad \arctan'''(0) = -2.$$

Dank der Taylor-Formel (angewendet auf die Stelle $x = 0$) gilt also

$$\arctan(x) = x - \frac{2}{3!}x^3 + x^3 r(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + x^3 r(x),$$

wobei $r(x)$ ein Restterm ist, welcher $\lim_{x \rightarrow 0} r(x) = 0$ erfüllt.

Setzen wir diese Taylor-Entwicklung ein, erhalten für den ursprünglichen Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\arctan \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3} r \left(\frac{1}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3} + r \left(\frac{1}{n} \right) \right),$$

dank dem Additionstheorem für den Logarithmus. Somit finden wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\arctan \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{3},$$

wobei wir $\lim_{n \rightarrow \infty} r \left(\frac{1}{n} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} r(x) = 0$ verwendet haben.

(e) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt es

$$\frac{\log(n+2) - \log(n)}{\log(n+1) - \log(n)} = \frac{\log \left(1 + \frac{2}{n} \right)}{\log \left(1 + \frac{1}{n} \right)},$$

deswegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+2) - \log(n)}{\log(n+1) - \log(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{2}{n} \right)}{\log \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{\log(1+x)},$$

falls der Limes auf der rechten Seite existiert. Aus dem Satz von Bernoulli-de L'Hôpital folgt, dass der Limes tatsächlich existiert und

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{\log(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+2x}}{\frac{1}{1+x}} = 2.$$

(f) Wir beobachten, dass

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2}$$

Auf der rechten Seite erkennen wir eine Riemann-Summe der Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ auf $[0, 1]$. Also mit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, kann die Summe oben als

$$\sum_{k=1}^n f \left(\frac{k}{n} \right) \left| \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right] \right|,$$

geschrieben werden, wobei das Intervall $[0, 1]$ in n disjunkte Teilintervalle der Länge $\frac{1}{n}$ zerlegt wurde. Da die Funktion f stetig ist und die Feinheit $1/n$ gegen 0 konvergiert, finden wir dank Satz 6.2.3 im Skript:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

0.4. Konvergente Teilfolgen

Welche der folgenden Folgen besitzt eine konvergente Teilfolge?

(a) $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$

(c) $(n + \sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$

(b) $(n \sin(\frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$

(d) $(\frac{1}{n} \sin(n) + n \sin(\frac{\pi}{2}n))_{n \in \mathbb{N}}$

Lösung.

(a) Die Folge ist beschränkt, deswegen besitzt die Folge dank dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge.

(b) Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

also konvergiert die ganze Folge gegen 1, und somit auch jede Teilfolge.

(c) Wir bemerken, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : |n + \sin(n)| \geq n - 1.$$

Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n - 1 = \infty,$$

divergiert die Folge gegen unendliche und kann keine konvergente Teilfolge besitzen. (Diese Teilfolge müsste ja beschränkt bleiben, was ein Widerspruch wäre zu $n + \sin(n) \geq n - 1$.)

(d) Falls n gerade ist, dann gilt $\sin(\frac{\pi}{2}n) = 0$. Nun sehen wir

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \text{ gerade}}} \frac{1}{n} \sin(n) + n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \text{ gerade}}} \frac{1}{n} \sin(n) = 0,$$

deswegen existiert eine konvergente Teilfolge.

0.5. Zwischenwertsatz und Mittelwertsatz

(a) Hat die Gleichung

$$x^4 = (x + 1)(x^2 + 5)$$

(mindestens) eine Lösung in \mathbb{R} ?

(b) Zeigen Sie: das Polynom

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 25x + 8$$

hat genau eine Nullstelle.

(c) Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $(0, 1)$ differenzierbar. Nehmen Sie an, dass

$$|f'(x)| < 1, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Zeigen Sie, dass höchstens eine Stelle $c \in [0, 1]$ existiert, so dass $f(c) = c$.

(d) Sei $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Nehmen Sie an, dass $f(0) \geq 0$ und $f(2) \leq 4$. Zeigen Sie, dass ein $c \in [0, 2]$ existiert, sodass $f(c) = c^2$.

(e) Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Lösung.

(a) Sei

$$f(x) = x^4 - (x+1)(x^2+5) = x^4 - x^3 - x^2 - 5x - 5.$$

Es gilt $f(0) = -5$ und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^4} = 1.$$

Deswegen gibt es $r > 0$ so dass $f(r) \geq 1$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass es ein $c \in (0, r)$ existiert, so dass $f(c) = 0$. Dann ist c eine Lösung der Gleichung auf \mathbb{R} .

(b) Wir bemerken, dass

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Deswegen hat f gemäss dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle auf \mathbb{R} . Nehmen wir zum Widerspruch an, dass $a < b$ zwei verschiedene Nullstellen von f sind, also $f(a) = 0$ und $f(b) = 0$. Dann gibt es gemäss dem Mittelwertsatz ein $c \in (a, b)$ sodass $f'(c) = 0$.

Nun gilt aber

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 25,$$

Und die Diskriminante des quadratischen Polynoms f' ist

$$(-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 25 = -104 < 0,$$

daher besitzt f' keine reelle Nullstelle. Das ist ein Widerspruch zu $f'(c) = 0$.

- (c) Beweis durch Widerspruch: seien $c, d \in [0, 1]$, $c < d$, sodass $f(c) = c$ und $f(d) = d$. Dann sind c und d zwei verschiedene Nullstellen der Funktion $g(x) = f(x) - x$ in $[0, 1]$. Deswegen existiert gemäss dem Mittelwertsatz ein $e \in (c, d)$, sodass $g'(e) = 0$. Nun gilt aber $g'(x) = f'(x) - 1$ auf $(0, 1)$, also nach Annahme

$$|g'(x)| = |f'(x) - 1| \geq 1 - |f'(x)| > 0.$$

Das ist ein Widerspruch zu $g'(e) = 0$.

- (d) Sei

$$g(x) = f(x) - x^2 \quad \forall x \in [0, 2].$$

Dann gilt für $c \in [0, 2]$

$$f(c) = c^2 \iff g(c) = 0.$$

Es gilt

$$g(0) = f(0) \geq 0 \quad \text{und} \quad g(2) = f(2) - 4 \leq 0,$$

d.h. $g(0) \geq 0 \geq g(2)$. Deswegen folgt aus dem Zwischenwertsatz dass ein $c \in [0, 2]$ existiert, sodass $g(c) = 0$.

- (e) Sei

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad \forall x > 0.$$

Dann gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Aus der Mittelwertsatz folgt, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ ein $\xi_n \in (n, n+1)$ existiert, sodass

$$f(n+1) - f(n) = f'(\xi_n) = \frac{1}{2\sqrt{\xi_n}}.$$

Da die Funktion $x \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$ streng Monoton fallend ist, folgt aus $n < \xi_n < n+1$:

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{2\sqrt{\xi_n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Wir schliessen, dass

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

0.6. Gleichmässige Konvergenz

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{x + \frac{1}{n}}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise auf $[0, 1]$ gegen eine Funktion f konvergiert. Schreiben Sie f explizit auf.
- (b) Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch gleichmässig auf $[0, 1]$?

Lösung.

- (a) Sei

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } x \in (0, 1] \end{cases}$$

Wir zeigen, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n(0) = 0$. Deswegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0 = f(0).$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $x \in (0, 1]$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \frac{1}{n}} = \frac{x}{x} = 1 = f(x).$$

Somit konvergiert f_n punktweise gegen f .

- (b) Die Konvergenz ist nicht gleichmässig. Die Funktionen f_n sind alle stetig auf $[0, 1]$. Falls der gleichmässige Grenzwert von f_n existiert, muss dieser auch stetig sein, dank Satz 4.8.1 im Skript. Gleichzeitig muss der gleichmässige Grenzwert einer Funktionenfolge (falls dieser existiert), mit dem punktweisen Grenzwert übereinstimmen. Der punktweise Grenzwert von f_n , also die Funktion f , ist jedoch nicht stetig auf $[0, 1]$. Also kann f_n nicht gleichmässig gegen f konvergieren.

Alternativ könnte man auch direkt argumentieren:

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in (0, 1]$:

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| 1 - \frac{x}{x + \frac{1}{n}} \right| = \frac{\frac{1}{n}}{x + \frac{1}{n}}.$$

Wir bemerken, dass $0 < \frac{1}{x + \frac{1}{n}} < 1$ für $x \in (0, 1]$, und dass für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + \frac{1}{n}} = 1.$$

Also gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x \in (0, 1]} \frac{1}{x + \frac{1}{n}} = 1,$$

und die Funktionenfolge kann nicht gleichmässig konvergieren.

0.7. Abschätzungen aus Ableitungen Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgende Ungleichung zu beweisen:

$$\frac{2}{\pi}x < \sin(x), \quad \forall x \in (0, \pi/2)$$

(a) Beweisen Sie, dass es genügt, die folgende Ungleichung:

$$g(x) > 0, \quad \forall x \in (0, \pi/2)$$

zu zeigen, wobei $g(x) := \sin(x) - \frac{2}{\pi}x$ für alle $x \in [0, \pi/2]$.

(b) Bestimmen Sie das Minimum von g auf $[0, \pi/2]$ mittels des Ableitungskriteriums und den Randwerten.

Hinweis: g erreicht sicher ein Minimum auf $[0, \pi/2]$. Weshalb? Wir weisen darauf hin, dass das Minimum auch in 0 oder $\pi/2$ angenommen werden kann und dort das Ableitungskriterium für Extremalstellen fehlschlägt, vergleiche mit dem Beispiel $h(x) := -x^2$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Man bemerke, dass mittels des Monotonie-Kriteriums bestimmt werden kann, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

(c) Nutzen Sie die Erkenntnisse der vorherigen Teilaufgabe, um die gesuchte Ungleichung zu beweisen.

Lösung.

(a) Dies ist eine einfache Konsequenz der Umordnung der Ungleichung.

(b) g ist stetig auf $[0, \pi/2]$ und erreicht somit dort sein Minimum. Dies kann entweder in 0, $\pi/2$ oder einem inneren Punkt des Intervalls angenommen werden. Für $x = 0, \pi/2$ finden wir:

$$g(x) = 0,$$

also wenn $g(x) \leq 0$ an einer Stelle x im Inneren des Intervalls ist, so erreicht es auch sein Minimum im Inneren. Wir wissen, dass wenn g sein Extremum in einem Punkt $x \in (0, \pi/2)$ annimmt, dann gilt dort:

$$g'(x) = 0$$

Nun können wir aber berechnen, dass wenn g in x_0 ein Extremum hat, so gilt:

$$g'(x_0) = \cos(x_0) - \frac{2}{\pi} = 0 \quad \implies \quad \cos(x_0) = \frac{2}{\pi} > 0$$

Wir beachten, dass für alle $x < x_0$ gilt:

$$g'(x) > g'(x_0) = 0,$$

da $\cos(x)$ auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist. Ferner finden wir durch analoge Argumentation für alle $x > x_0$:

$$g'(x) < g'(x_0) = 0$$

Dank des Monotonie-Kriteriums können wir also folgern, dass g auf $[0, x_0]$ streng monoton wachsend und auf $[x_0, \pi/2]$ streng monoton fallend ist. Somit muss x_0 zwangsläufig ein lokales Maximum sein und kann nicht das globale Minimum werden. Daher ist das Minimum von g in $x = 0$ und $x = \pi/2$ und somit 0. Das Minimum kann gemäss unserer Argumentation nicht in $(0, \pi/2)$ angenommen werden, also finden wir:

$$g(x) > 0, \quad \forall x \in (0, \pi/2)$$

- (c) Die Ungleichung am Schluss der letzten Teilaufgabe beinhaltet die notwendige Aussage.

0.8. Extremalstellen

Bestimmen Sie das globale Minimum und Maximum der folgenden Funktionen:

(a) $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1,$

(b) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2+1},$

(c) $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (x-1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$

Lösung.

- (a) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Dieses liegt entweder am Rand des Definitionsbereichs oder im Innern. Da f im Innern differenzierbar ist, muss es im letzteren Fall ein kritischer Punkt sein. Wir rechnen:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = (3x + 4)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{2, -\frac{4}{3}\right\}.$$

Die einzigen Kandidaten für globale Extremalstellen sind also die Randpunkte $-2, 2$ und der innere Punkt $-\frac{4}{3}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen lauten:

$$\begin{aligned} f(2) &= -11, \\ f\left(-\frac{4}{3}\right) &= \frac{203}{27} \approx 7.519, \\ f(-2) &= 5. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -\frac{4}{3}$, der kleinste der bei $x = 2$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -\frac{4}{3}$ und ein globales Minimum bei $x = 2$.

- (b) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wenn es im Innern des Definitionsbereichs liegt, so muss es ein kritischer Punkt von f sein, da f dort differenzierbar ist. Wir rechnen:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - 2x(x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$-x^2 - 2x + 1 = 0,$$

also für

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Der Wert $-1 - \sqrt{2} < -1$ liegt nicht im Definitionsintervall von f , der Wert $-1 + \sqrt{2}$ dagegen schon. Die Kandidaten für globale Extremalstellen sind also $\{-1, -1 + \sqrt{2}, 1\}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0, \\ f(-1 + \sqrt{2}) &= \frac{\sqrt{2}}{2 - 2\sqrt{2} + 2} = \frac{\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} \cdot \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{2} + 1)}{8} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} > 1 \\ f(1) &= 1. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -1 + \sqrt{2}$, der kleinste der bei $x = -1$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -1 + \sqrt{2}$ und ein globales Minimum bei $x = -1$.

- (c) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wir bestimmen die kritischen Punkte von f :

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + (x-1) \cdot (-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (1+x-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

Wegen $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Die kritischen Punkte von f sind somit

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Beide Werte liegen im Innern des Definitionsintervalls. Die Kandidaten für globale Extremstellen sind also die Randpunkte $x = -1$ und $x = 2$ sowie die kritischen Punkte $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned} f(-1) &= -\frac{2}{\sqrt{e}} = -1.213\dots, \\ f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= -\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{4}} = -1.336\dots, \\ f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{4}} = 0.166\dots, \\ f(2) &= \frac{1}{e^2} = 0.135\dots \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, der kleinste der bei $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und ein globales Minimum bei $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Da das Berechnen der Funktionswerte an den kritischen Stellen eher mühsam ist, kann man auch wie folgt argumentieren. Da für das Polynom $1+x-x^2$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x-x^2) = -\infty, \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x-x^2) = -\infty,$$

und $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ für alle x , können wir folgendes Verhalten von $f'(x)$ folgern. Seien $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ und $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ die beiden Nullstellen von $f'(x)$ (mit $x_1 < x_2$). Dann muss gelten

$$f'(x) < 0, \text{ für } x < x_1, \quad f'(x) > 0, \text{ für } x_1 < x < x_2, \quad f'(x) < 0, \text{ für } x > x_2.$$

Die Funktion $f(x)$ ist also monoton fallend für $x < x_1$, dann monoton steigend für $x_1 < x < x_2$, und wieder monoton fallend für $x > x_2$. Für die Randwerte des Intervalls $[-1, 2]$ gilt $-1 < x_1$ und $2 > x_2$. Zwischen -1 und x_1 fällt die Funktion also ab, deshalb ist der Randpunkt -1 nur ein Kandidat für ein Maximum,

und nicht für ein Minimum. Zwischen x_1 und x_2 steigt die Funktion, also ist x_1 Kandidat für ein Minimum und x_2 Kandidat für ein Maximum. Schliesslich fällt die Funktion zwischen x_2 und dem Randpunkt 2, also ist 2 nur Kandidat für ein Minimum. Da $f(-1) < 0 < f(x_2) = f(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ muss x_2 das globale Maximum sein. Gleichermassen, da $f(x_1) = f(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) < 0 < f(2)$ muss x_1 das globale Minimum sein.

0.9. Parameterabhängige Integrale

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass gilt

$$\int_0^{x^2+x^3} f(t) dt = x, \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Bestimmen Sie $f(2)$.

Hinweis: Es sei F eine Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$. Schreiben Sie das Integral um mittels F und dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung. Wenn Sie auf beiden Seiten nach x ableiten und $F' = f$ verwenden, sollten Sie der Lösung nahe kommen.

Lösung. Es sei F die Stammfunktion zu f mit $F(0) = 0$. Gemäss Hauptsatz gilt:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Somit sehen wir:

$$F(x^2 + x^3) = F(x^2 + x^3) - F(0) = \int_0^{x^2+x^3} f(t) dt = x, \quad \forall x \geq 0$$

Leiten wir nun für $x > 0$ auf beiden Seiten nach x ab, so sehen wir dank der Kettenregel und $F' = f$:

$$f(x^2 + x^3)(2x + 3x^2) = 1$$

Daher wissen wir durch Einsetzen von $x = 1$:

$$f(2) \cdot 5 = 1 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{5}$$

0.10. Ableitungen, Integrale Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) **Ableitungen:** Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen explizit.

- a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x}}$ b) $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\arctan(x)}{1-x^2}$
 c) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos(x^{-x})$

(b) Integrale: Lösen Sie die folgenden Integrale explizit.

- a) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ d) $\int_1^2 \log(x) dx$
 b) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ e) $\int_1^{e^\pi} \sin(\log(x)) dx$
 c) $\int_3^4 \frac{1}{x^2-2x} dx$ f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \log(\sin(x)) dx$

Lösung.

(a) a) Mit der Produkt- und Kettenregel finden wir:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} 2xe^{x^2} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} e^{x^2} = 2\sqrt{x}e^{x^2} - \frac{1}{2} \frac{e^{x^2}}{x^{\frac{3}{2}}}$$

b) Mittels der Produktregel (oder der Quotientenregel):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x \arctan(x)}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{1-x^2 + 2x(1+x^2) \arctan(x)}{(1-x^2)^2(1+x^2)} \end{aligned}$$

c) Die Ableitung von x^{-x} lässt sich durch umschreiben berechnen: $x^{-x} = e^{-x \log(x)}$. Also gilt

$$(x^{-x})' = (-1 - \log(x))e^{-x \log(x)} = -(1 + \log(x))x^{-x}$$

Somit finden wir mit der Kettenregel:

$$f'(x) = (1 + \log(x))x^{-x} \sin(x^{-x})$$

(b) a) Mit der Substitution $y = x^2$ mit $dy = 2x dx$ finden wir

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+y}} dy = \sqrt{1+y} \Big|_{y=0}^{y=1} = \sqrt{2} - 1$$

b) Mit der Substitution $x = \sin(y)$ mit $dx = \cos(y)dy$ bekommen wir

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(y)} \cos(y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y) dy$$

Unter Verwendung von $\cos(y)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2y))$ finden wir weiter

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y) dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2y) dy = \frac{\pi}{4},$$

wobei das zweite Integral Null ergibt.

c) Wir verwenden eine Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{1}{x(x-2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right)$$

Somit gilt

$$\int_3^4 \frac{1}{x^2 - 2x} dx = \frac{1}{2} \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} (\log(2) - \log(4) + \log(3)) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{3}{2}\right)$$

d) Wir verwenden partielle Integration:

$$\int_1^2 \log(x) dx = \int_1^2 \log(x)(x)' dx = \log(x)x \Big|_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 \frac{1}{x} dx = 2 \log(2) - 1$$

e) Wir verwenden die Substitution $y = \log(x)$ oder $x = e^y$ mit $dx = e^y dy$ um folgende Gleichung zu finden:

$$\int_1^{e^\pi} \sin(\log(x)) dx = \int_0^\pi \sin(y) e^y dy.$$

Durch wiederholte Anwendung von partieller Integration finden wir für diese Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(y) e^y dy &= \sin(y) e^y \Big|_{y=0}^{y=\pi} - \int_0^\pi \cos(y) e^y dy \\ &= 0 - \cos(y) e^y \Big|_{y=0}^{y=\pi} - \int_0^\pi \sin(y) e^y dy \\ &= e^\pi + 1 - \int_0^\pi \sin(y) e^y dy \end{aligned}$$

also

$$\int_0^\pi \sin(y) e^y dy = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

f) Wir nutzen $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos(x)^2}$ für alle $0 \leq x \leq \pi/2$. Dann finden wir mittels der Substitution $y = \cos(x)$ sowie den Logarithmusgesetzen:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin(x) \log(\sin(x)) dx &= \int_0^{\pi/2} \sin(x) \log(\sqrt{1 - \cos(x)^2}) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot \frac{1}{2} (\log(1 - \cos(x)) + \log(1 + \cos(x))) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (\log(1 - y) + \log(1 + y)) dy \\ &= \frac{1}{2} \left(-(1 - y) \log(1 - y) + (1 - y) + (1 + y) \log(1 + y) - (1 + y) \right) \Big|_0^1 \\ &= \log(2) - 1 \end{aligned}$$