0.1. Kreise und Geraden in der komplexen Ebene

Wir erinnern uns, dass ein *Kreis* in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben ist durch eine Gleichung der Form:

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2,$$

wobei alle (x, y), welche diese Identität erfüllen, auf dem Kreis mit Mittelpunkt (m_x, m_y) und Radius r liegen. Eine *Gerade* ist hingegen gegeben durch:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0,$$

wobei alle (x, y), welche die Identität erfüllen, auf einer Gerade liegen mit Steigungsvektor $(-b, a)$ und c die Entfernung zum Ursprung parametrisiert. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine einheitliche Beschreibung von Geraden und Kreisen in der komplexen Ebene zu erhalten.

(a) Nutzen Sie die Zerlegung von komplexen Zahlen in Real- und Imaginärteil, um zu beweisen, dass die folgenden Gleichungen Kreise bzw. Geraden in der Ebene darstellen:

(i.) $|z|^2 - 1 = 0$

(ii.) $|z|^2 - iz + i\overline{z} = 0$

(iii.) $|z|^2 - iz + i\overline{z} - 2 = 0$

(iv.) $-iz + i\overline{z} + 1 = 0$

Skizzieren Sie die Mengen.

(b) Beweisen Sie durch Umformen der Identität und unter der Verwendung des Real- und Imaginärteils von z, dass die folgende Identität:

$$a|z|^2 + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0,$$

einen Kreis (für $a \neq 0$) bzw. eine Gerade (für $a = 0$) parametrisiert. Dabei ist b eine beliebige komplexe Zahl und a, c reelle Zahlen mit $|b|^2 - ac > 0$. Gilt auch die Umkehrung, d.h. lassen sich alle Kreise und Geraden in der Ebene durch eine solche Identität beschreiben?

(c) Verwenden Sie die Darstellung aus der vorherigen Teilaufgabe, um zu zeigen, dass die Inversionsabbildung, welche z seine Inverse z^{-1} zuordnet, Kreise und Geraden mit dem Koeffizienten $c \neq 0$ auf Kreise und Geraden abbildet. Denken Sie darüber nach, was im Falle eines Kreises bzw. einer Geraden mit $c = 0$ passiert.

0.2. Konvergenzverhalten von Potenzreihen

(a) Betrachten Sie die Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius R und bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = R$ die Potenzreihe konvergiert.

(b) Betrachten Sie die Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius R und bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = R$ die Potenzreihe konvergiert.

(c) Betrachten Sie die Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius R und bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = R$ die Potenzreihe konvergiert.

0.3. Grenzwerte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{2^x - 1}$$

(b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(x+1) - x}{\cos(x) - 1}$$

(c)

$$\lim_{x \to 0} (1 + 2\sin(x))^{\frac{1}{\tan(x)}}$$

(d)

$$\lim_{n \to \infty} n^3 \left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$$

(e)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log(n+2) - \log(n)}{\log(n+1) - \log(n)}$$

(f)

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$$

Hinweis: *Betrachten Sie in der letzten Teilaufgabe die Summe als Riemann-Summe.*

0.4. Konvergente Teilfolgen

Welche der folgenden Folgen besitzt eine konvergente Teilfolge?

(a) $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $(n\sin(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $(n+\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(\frac{1}{n}\sin(n)+n\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

0.5. Zwischenwertsatz und Mittelwertsatz

(a) Hat die Gleichung
$$x^4=(x+1)(x^2+5)$$
(mindestens) eine Lösung in $\mathbb{R}$?

(b) Zeigen Sie: das Polynom
$$f(x)=x^3-7x^2+25x+8$$
hat genau eine Nullstelle.

(c) Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ stetig und auf $(0,1)$ differenzierbar. Nehmen Sie an, dass
$$|f'(x)|<1,\quad \forall x\in(0,1).$$
Zeigen Sie, dass höchstens eine Stelle $c\in[0,1]$ existiert, so dass $f(c)=c$.

(d) Sei $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ stetig. Nehmen Sie an, dass $f(0)\geq 0$ und $f(2)\leq 4$. Zeigen Sie, dass ein $c\in[0,2]$ existiert, sodass $f(c)=c^2$

(e) Zeigen Sie: $\forall n\in\mathbb{N}$ gilt
$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

0.6. Gleichmässige Konvergenz

Für jedes $n\in\mathbb{N}$ sei
$$f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\quad f_n(x)=\frac{x}{x+\frac{1}{n}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf $[0,1]$ gegen eine Funktion f konvergiert. Schreiben Sie f explizit auf.

(b) Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmässig auf $[0,1]$?

0.7. Abschätzungen aus Ableitungen Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgende Ungleichung zu beweisen:

$$\frac{2}{\pi}x < \sin(x), \quad \forall x \in (0, \pi/2)$$

(a) Beweisen Sie, dass es genügt, die folgende Ungleichung:

$$g(x) > 0, \quad \forall x \in (0, \pi/2)$$

zu zeigen, wobei $g(x) := \sin(x) - \frac{2}{\pi}x$ für alle $x \in [0, \pi/2]$.

(b) Bestimmen Sie das Minimum von g auf $[0, \pi/2]$ mittels des Ableitungskriteriums und den Randwerten.

Hinweis: g erreicht sicher ein Minimum auf $[0, \pi/2]$. Weshalb? Wir weisen darauf hin, dass das Minimum auch in 0 oder $\pi/2$ angenommen werden kann und dort das Ableitungskriterium für Extremalstellen fehlschlägt, vergleiche mit dem Beispiel $h(x) := -x^2$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Man bemerke, dass mittels des Monotonie-Kriteriums bestimmt werden kann, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

(c) Nutzen Sie die Erkenntnisse der vorherigen Teilaufgabe, um die gesuchte Ungleichung zu beweisen.

0.8. Extremalstellen

Bestimmen Sie das globale Minimum und Maximum der folgenden Funktionen:

(a) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1,$

(b) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x+1}{x^2+1},$

(c) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x-1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$

0.9. Parameterabhängige Integrale

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass gilt

$$\int_0^{x^2+x^3} f(t)\, dt = x, \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Bestimmen Sie $f(2)$.

Hinweis: Es sei F eine Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$. Schreiben Sie das Integral um mittels F und dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung. Wenn Sie auf beiden Seiten nach x ableiten und $F' = f$ verwenden, sollten Sie der Lösung nahe kommen.

0.10. Ableitungen, Integrale Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Ableitungen: Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen explizit.

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x}}$

b) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\arctan(x)}{1-x^2}$

c) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos(x^{-x})$

(b) Integrale: Lösen Sie die folgenden Integrale explizit.

a) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$

b) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$

c) $\int_3^4 \frac{1}{x^2-2x}\, dx$

d) $\int_1^2 \log(x)\, dx$

e) $\int_1^{e^\pi} \sin(\log(x))\, dx$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \log(\sin(x))\, dx$