I LOGIK UND GRUNDLAGEN

I.1 Logik

In der Mathematik kommen Aussagen die entweder falsch oder wahr sind.
Eine mathematische Aussage ist entweder wahr oder falsch, jedoch nie beides zugleich.
Das ist eines der grundsätzlichen Axiomen der Mathematik

I.1.1 Beispiele

i) "$4 > 2$" ist wahr

ii) "$5 < 3$" ist falsch

iii) "$\forall n \in \mathbb{N}$ falls $n > 4$ dann gilt $n > 2$" ist wahr

$\forall$ ist der Allquantor: bedeutet "für alle"

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$ sind die natürliche Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\dots\}$ sind die natürliche Zahlen zusammen mit 0

Mit Aussagen kann man rechnen!

I.1.2 Das Rechnen mit Aussagen

Sei A eine Aussage

$\neg A$ bezeichnet die Negation von A

d.h. $\neg A$ ist wahr wenn A falsch ist.

$\neg A$ ist falsch wenn A wahr ist.

Beispiele

i) $\neg\, n > 4$ ist $n \leq 4$ $(n \in \mathbb{N})$

ii) Ich habe eine Menge von Fischen die entweder rot oder grün sind

A : "Alle meine Fische sind grün"

$\neg A$: "Ich habe mindestens einen roten Fisch"

⚠ die Negation von A ist nicht

B : "Alle meine Fische sind rot"

Das ist der Gegensatz (keine klare mathematische Bedeutung) aber nicht die Negation.

Notation: Seien A und B zwei Aussagen

i) $A \wedge B$ bedeutet "A und B"

d.h. $A \wedge B$ wahr ist wenn die beide Aussagen A und B wahr sind.

ii) $A \vee B$ bedeutet "A oder B"

d.h. $A \vee B$ wahr ist wenn A wahr ist oder B wahr ist

: Mindestens eine von den zwei Aussagen ist wahr die andere Aussage kann wahr oder falsch sein.

iii) $A \rightarrow B$ bedeutet : wenn A wahr ist dann ist B auch wahr.

⚠ Man darf immer $A \rightarrow B$ schreiben selbst wenn A falsch ist.

iv) $A \leftrightarrow B$ bedeutet :

wenn A wahr ist dann ist B auch wahr <u>und</u> wenn B wahr ist dann ist A auch wahr.

Beispiele i) $\underbrace{\text{"}n > 4\text{"}}_{A} \rightarrow \underbrace{\text{"}n > 5\text{"}}_{B}$

$n \in \mathbb{N}$

ist nicht wahr.

ii) "$n > 5$" $\longrightarrow$ "$n > 4$"

ist wahr

Die sogenannte <u>Wahrheitstafel</u> ist die Zusammenfassung von alle diesen Definitionen

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Falls $A \rightarrow B$ wahr ist schreibt man

$$A \Rightarrow B$$

Falls $A \longleftrightarrow B$ wahr ist schreibt man

$$A \Longleftrightarrow B$$

Übung: Sei $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Aussagen

i) Beweisen Sie

$$\neg \left(\forall n \in \mathbb{N} \quad A(n) \text{ wahr} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } \neg A(n) \text{ wahr ist}$$

Existenzquantor: bedeutet "es existiert"

z. B.

$A(n)$: "n ist eine gerade Zahl"

d. h. $\exists\, p \in \mathbb{N}$ mit $n = 2p$

$$\neg \left(\forall n \in \mathbb{N} \quad A(n) \text{ wahr} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ die nicht gerade ist}$$

(z. B. $n = 3$)

ii) Beweisen Sie

$$\neg\,(\exists n \in \mathbb{N} \quad A(n) \text{ wahr})$$
$$\Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \neg A(n) \text{ wahr}$$

Bemerkung: Beobachten Sie in den zwei Beispielen den Austausch von

$$\exists \quad \text{und} \quad \forall$$

I.1.3 Transitivität der Implikation

$A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ dann folgt

$$A \Rightarrow C$$

I.1.4 Kontraposition (Umkehrschluss)

Falls $A \Rightarrow B$.

Dann gilt: $\neg B$ wahr nur wenn $\neg A$ wahr

d. h. $\neg B \Rightarrow \neg A$

Bemerkung: für alle Aussagen A gilt

$$\neg(\neg A) = A$$

dann

$A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

I.1.5 Folgerung: Das Prinzip des indirekten Beweises.

Um eine Implikation von der Form

$$A \Rightarrow B$$

zu beweisen, es genügt (es ist äquivalent tatsächlich) zu beweisen

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

Beispiel:

A: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$

B: "es gibt keine grösste natürliche Zahl"

Beweis von $A \Rightarrow B$

$\neg B$: „Es existiert eine grösste natürliche Zahl"

Sei n diese Zahl.

$n+1$ ist grösser als n

dann kann $n+1$ keine natürliche Zahl sein : $\neg A$

Wir haben bewiesen $\neg B \Rightarrow \neg A$

(ohne bis jetzt sich die Frage zu stellen ob A wahr ist)

Es ist klar dass A wahr ist

Dann bekommen wir dass B wahr ist.

I.1.6 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Für alle $n \in \mathbb{N}$ wir geben uns eine Aussage $A(n)$

Wir machen zwei Voraussetzungen

$$A: \left\{ \begin{array}{ll} * & A(1) \text{ ist wahr} \quad \text{und} \\ * & \forall n \in \mathbb{N} \quad A(n) \Rightarrow A(n+1) \end{array} \right.$$

ist wahr

dann bekommen wir

$$B: \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad A(n) \text{ ist wahr}$$

Das kommt direkt aus der Transitivität:

Nehmen wir an dass $\neg B$ wahr ist

dann $\neg B: \ \exists n \in \mathbb{N} \quad A(n)$ falsch ist

liefert die Existenz von $n \in \mathbb{N}$ mit $A(n)$ falsch

Wir nehmen die kleinste natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ für welche $A(n_0)$ falsch ist.

Dankt A bekommen wir

$$* \quad n_0 > 1 \quad \wedge \quad A(n_0 - 1) \text{ wahr}$$

Aber $\quad * \quad A(n_0-1) \Rightarrow A(n_0)$

also $\quad \neg B \Rightarrow \neg A$

d. h. $\quad A \text{ wahr} \Rightarrow B \text{ wahr}$

I.1.7 Beispiel von Induktionsbeweis

$$A(n) : \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Wir Beweisen

$$B : \quad \forall n \in \mathbb{N} \; A(n) \text{ wahr}$$

Dankt I.1.6 es genügt zu beweisen

$$A(1) \text{ wahr} \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N} \; A(n) \Rightarrow A(n+1)$$

Beweis von B wahr

$A(1)$ sagt $1 = 1$ das ist wahr

Nehmen wir an dass $A(n)$ wahr ist

Dann beweisen wir $A(n+1)$ unter dieser Vorraussetzung.

$A(n)$ sagt $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

wir addieren $(2n+1)$ zu den beiden Seiten von dieser Gleichung und wir bekommen

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1) = n^2+2n+1$$
$$= (n+1)^2$$

das ist $A(n+1)$

Wir haben bewiesen

$A(1)$ wahr $\wedge$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

das impliziert dass $A(n)$ für alle n wahr ist

I.2 Mengenlehre

I.2.1 Definition

Eine Menge ist eine ungeordnete ($\{a,b\} = \{b,a\}$) Zusammenfassung verschiedenen Objekte (sogenannte 'Elemente') zu einem Ganzen.

I.2.2 Beispiele

i) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$

ii) $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

iii) $\emptyset$: die leere Menge

...

I.2.3 Mengenoperationen

Seien A und B zwei beliebige Menge. Wir führen drei Verknüpfungen von Mengen ein.

$$A \cup B = \{x \, ; \, (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

$$A \cap B = \{x \, ; \, (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

$$A \setminus B = \{x \, ; \, (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

Weitere Quantoren

$\in$ gehört zu

$\notin$ gehört nicht zu

Relationen zwischen unterschiedlichen Mengen

$A \subset X$ bedeutet

alle Elemente von A sind Elemente von X

Man sagt in dem Fall dass A eine Teilmenge* von X bildet.

Falls $A \subset X$ die Menge $X \setminus A$ wird A^c notiert und heisst das Komplement von A innerhalb X.

* oder Untermenge von X

I.2.4 Übungen

Seien A und B zwei Teilmengen von einer Menge X

i) Beweisen Sie dass $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Lösung:

$$x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \in X \setminus (A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A^c) \vee (x \in B^c)$$

$$\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$$

ii) Beweisen Sie dass

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

I.3 Funktionen und Abbildungen

Im der Schule wurden meistens Funktionen

für reelle Zahlen studiert
Das heisst Zuordnungsvorschrifte der Art

$$x \longmapsto y = f(x)$$

wobei x und y reelle Zahlen sind.

z.B. $\qquad f(x) = x^2$

I.3.1 Definitionen

Allgemein betrachten wir 2 Mengen X und Y. Eine Abbildung (Funktion) f von X nach Y ist eine Zuordnung die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet. Das Bild von x wird $y = f(x)$ notiert

X heisst Definitionsbereich von f

Y heisst Wertebereich von f

Man schreibt oft $f : x \longmapsto f(x) = y$

Sei $A \subset X$ eine Untermenge von X

Das Bild von A ist die folgende Untermenge von Y

$$f(A) := \{ y \in Y \; ; \; \exists x \in A \text{ mit } f(x) = y \}$$

so dass

⚠ $\forall y \in f(A)$ es wird nicht ausgeschlossen dass es mehrere $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$

Sei $B \subset Y$ eine Untermenge von Y.

Das Urbild von B ist die folgende Untermenge von X

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X \; ; \; f(x) \in B \}$$

Insbesondere für $B = \{y\}$

(d.h. B besitzt genau ein Element)

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \,;\, f(x) = y\}$$

⚠ Es kann sein dass $f^{-1}(B) = \emptyset$

Beispiel

$$f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$$

$$n \longmapsto f(n) = n^2 - n$$

Beweisen Sie

dass i) $f^{-1}(\{0\}) = \{0, 1\}$

ii) $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$

Beweis von i)

$$n \in f^{-1}(\{0\}) \Longleftrightarrow n^2 - n = 0$$

$n = 0$ ist eine Lösung

für $n \neq 0$

$$n^2 - n = 0 \iff n - 1 = 0 \iff n = 1$$

(da $n \neq 0$ darf man durch n dividieren)

Beweis von ii)

Beobachtung

A: $\forall n \quad f(n+1) \geq f(n)$

(Man sagt dass f wachsend ist)

Beweis von A

$$f(n+1) = (n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1$$

$$= n^2 - n + 2n = f(n) + 2n$$

$$\geq f(n)$$

$f(0) = f(1) = 0$ und $f(2) = 2 > 1$

$$\Longrightarrow f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$$

I.3.3 Die Komposition (oder Die Verknüpfung) von Funktionen.

Seien X, Y und Z drei Mengen,

$f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$.

Dies ergibt eine neue Abbildung zwischen X und Z

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

$g \circ f$: "g verknüpft mit f"

$$\forall x \in X \qquad g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$$

Die Verknüpfung ist assoziativ:

Seien $f : X \to Y$, $g\ Y \to Z$ und $h : Z \to W$

Dann gilt
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

I.3.4 Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Definition. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung

i) f heisst surjektiv falls jedes $y \in Y$ mindestens ein Urbild hat

d.h. $\forall y \in Y \quad f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$

ii) f heisst injektiv falls jedes $y \in Y$ höchstens ein Urbild hat

d.h. $\forall x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

iii) f heisst bijektiv falls f surjektiv und injektiv ist d.h. $\forall y \in Y \; \exists! x \in X$ mit $f(x) = y$

Eindeutig Quantor : $\exists!$ "es existiert genau ein"

Falls f bijektiv ist können wir die Umkehrabbildung definieren

$$g : Y \longrightarrow X$$

~~so~~ dass $\forall y \in Y \quad f \circ g(y) = y$

und $\forall x \in X \quad g \circ f(x) = x$

g wird f^{-1} notiert

⚠ Bei der Notation

$$f^{-1}(B) = \{ x \; ; \; f(x) \in B \}$$

es wird nicht verlangt dass f bijektiv ist.