II Zahlen und Vektoren

II.1 Elementare Zahlen

Natürliche Zahlen $\quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3 \cdots\}$$

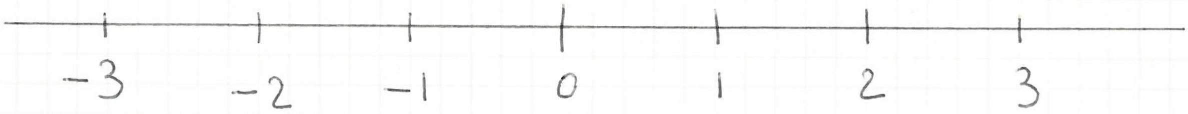
Ganze Zahlen $\quad \mathbb{Z} = \{\cdots -2, -1, 0, 1, 2, 3 \cdots\}$

Rationelle Zahlen $\quad \mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{p}{q} \; ; \; (p \in \mathbb{Z}) \wedge (q \in \mathbb{N}) \right\}$

Zähler

Nenner

Die Zahlen kann man der Grösse nach auf dem Zahlenstrahl anordnen



die rationelle Zahlen sind "irgendwo inzwischen"

Beobachtung: Zwischen zwei unterschiedlichen rationelle Zahlen gibt es immer eine weitere unterschiedliche rationelle Zahl.

Beweis der Beobachtung:

Seien $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ mit $r_1 < r_2$

Aussage 1: $\frac{r_1 + r_2}{2} \in \mathbb{Q}$

Beweis der Aussage 1. $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ und $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ mit $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ und $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right) = \frac{1}{2} \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$$

$$= \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{2 q_1 q_2} \qquad \begin{cases} p_1 q_2 + p_2 q_1 \in \mathbb{Z} \\ 2 q_1 q_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{r_1 + r_2}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \text{Aussage 1}$$

Aussage 2: $r_1 < \frac{r_1 + r_2}{2} < r_2$

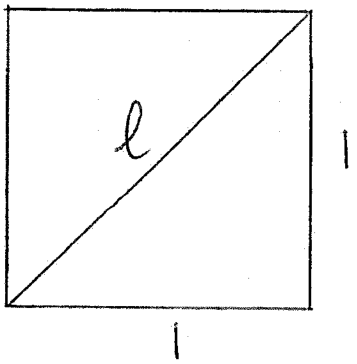
Beweis der Aussage 2

$$r_1 < \frac{r_1 + r_2}{2} < r_2 \iff \begin{cases} 2r_1 < r_1 + r_2 \\ \text{und} \\ r_1 + r_2 < 2r_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r_1 < r_2 \\ \text{und} \\ r_1 < r_2 \end{cases} \quad \text{das ist wahr.}$$

$\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig! Illustration

Der Satz des Pythagoras:



$$l^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

II.1.1 Satz Es gibt keine $l \in \mathbb{Q}$ mit $l^2 = 2$

Beweis von dem Satz II.1.1

Indirekt Beweis: nehmen wir an dass es $l \in \mathbb{Q}$ mit $l^2 = 2$ existiert.

d.h. $\exists\, p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \iff p^2 = 2q^2$$

Wir können p und q so nehmen dass die beide Zahl keinen gemeinsamen Teiler ausser 1 haben (sonst diviedieren wir p und q durch diesen Zahl).

$p^2 = 2q^2 \Rightarrow$ 2 teilt p (d.h. p ist eine gerade Zahl)

Wir können dann schreiben

$$p = 2m \quad \text{wobei } m \in \mathbb{Z}$$

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow 4n^2 = 2q^2$$

$$\Rightarrow 2n^2 = q^2 \Rightarrow 2 \text{ teilt } q$$

Dann haben p und q einen gemeinsamen Teiler : 2. Wiederspruch!

Dann ist unsere Vorraussetzung $\exists l \in \mathbb{Q};\ l^2=2$ falsch. $\square$

$\mathbb{Q}$ hat "lücken". Die "Vervollständigung" von $\mathbb{Q}$ heisst $\mathbb{R}$

In dieser Vorlesung überspringen wir die explizit Konstruktion von $\mathbb{R}$ und nehmen $\mathbb{R}$ als gegeben an. Trotzdem wiederholen wir die grundsätzlichen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ die wir schon aus der Schuhle kennen.

II.2 Die reellen Zahlen

II.2.1 Die Axiome für $\mathbb{R}$ die auch für $\mathbb{Q}$ gelten.

Genau die selben Axiome die für $\mathbb{Q}$ gelten, gelten auch für $\mathbb{R}$.

Für die Addition

A i) Assoziativität

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x+(y+z) = (x+y)+z$

A ii) Existenz eines neutralen Elements

$\exists 0 \; ; \; \forall x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = x$

A iii) Existenz eines inversen Elements

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists\, y \in \mathbb{R} \quad x + y = 0$

Man beweist dass $\forall x \in \mathbb{R}$ der Inverse wird eindeutig bestimmt (Skript).

A iv) Kommutativität $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$x + y = y + x$

Multiplikation

M i) Assoziativität $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

M ii)

Existenz eines neutralen Elements

$$\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \; ; \; \forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 1 = x$$

M iii) Existenz eines Inverses

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = 1$$

M iv) Kommutativität

$$\forall x,y \in \mathbb{R} \qquad x \cdot y = y \cdot x$$

Distributivitätsgesetz (zwischen · und +)

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R} \quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Auf $\mathbb{R}$ gibt es auch eine Ordnung

O i) Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x$

O ii) Transitivität $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$$

O iii) Identivität $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$$

O iv) Die Ordnung ist total

$\forall x, y$ gilt $(x \leq y) \vee (y \leq x)$

Die Ordnung ist mit der Addition und der Multiplikation konsistent

K i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

K ii) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall z \geq 0$

$$x \leq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$$

II.2.2 Folgerungen von den Axiomen

i) $\forall x \in \mathbb{R}$ die Inverse für $+$ ist eindeutig. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Inverse für $\cdot$ ist eindeutig

ii) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 0 = 0$

iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$$

iv) $\forall x \in \mathbb{R}$ die Inverse von x bezüglich der Addition wird $-x$ notiert.

Mit dieser Notation gilt

$$(-1) \cdot x = -x$$

v) $$(-1) \cdot (-1) = 1$$

vi) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$

vii) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

Wobei x^{-1} die Notation für die Inverse von x bezüglich der Multiplikation ist

viii) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$ (d.h. $x \geq 0$ und $y \geq 0$)

$$x \leq y \iff x^2 \leq y^2$$

ix) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad x \leq y \Rightarrow -y \leq -x$

II.2.3 Das Vollständigkeitsaxiom

Die entscheidende Eigenschaft von $\mathbb{R}$ im Vergleich mit $\mathbb{Q}$ ist das Vollständigkeitsaxiom

Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$ (die nicht leer sind) so dass

$\forall a \in A$ und $\forall b \in B$ gilt $a \leq b$

Dann existiert $c \in \mathbb{R}$ mit

$\forall a \in A$ und $\forall b \in B$ $\quad a \leq c \leq b$

Wir werden schauen dass diese Eigenschaft für $\mathbb{Q}$ <u>nicht</u> gilt.

II.2.4 Übung:

Es existiert $l \in \mathbb{R}$ mit $l^2 = 2$.

Beweis der Aussage

$$A := \{ a \in \mathbb{R} ; \ (1 \leq a \leq 2) \wedge (a^2 < 2) \}$$

$$B := \{ b \in \mathbb{R} ; \ (1 \leq b \leq 2) \wedge (b^2 \geq 2) \}$$

Behauptung A und B sind nicht leer

Beweis der Behauptung $1 \in A$, $2 \in B$.

$\forall a \in A$ und $\forall b \in B$ gilt

$$a^2 < 2 \leq b^2 \Rightarrow a^2 \leq b^2$$

Dann $a \leq b$ ($a \geq 0$ und $b \geq 0$)

Folgerung viii)

Vollständigkeitsaxiom $\Rightarrow$

$\exists c \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in A$ und $\forall b \in B$

$$a \leq c \leq b$$

Behauptung: $c^2 = 2$

Beweis der Behauptung

Indirekt:

Nehmen wir an dass die Behauptung falsch ist. $\forall a \in A$ und $\forall b \in B$

$$a \leq c \leq b \Rightarrow a^2 \leq c^2 \leq b^2 \Rightarrow \begin{cases} c \geqslant 1 \\ \text{und} \\ c \leqslant 2 \end{cases}$$

Falls $c^2 < 2$, da $c \geqslant 1$,

man bekommt $c \in A$

Sei $\alpha := 2 - c^2$. Nach der Vorraussetzung man hat $0 < \alpha \leqslant 1$

Sei $d := c + \frac{\alpha}{5}$ $\quad \forall a \in A \quad a \leq c < d$

$\Rightarrow \quad d \notin A$

Aber $\quad d^2 = c^2 + \frac{\alpha^2}{25} + \frac{2c\alpha}{5} < c^2 + \alpha\left(\frac{\alpha}{25} + \frac{2c}{5}\right)$

$\alpha \leqslant 1$ und $c \leqslant 2 \Rightarrow d^2 < c^2 + \alpha\left(\frac{1}{25} + \frac{4}{5}\right) < c^2 + \alpha = 2$

Aber $1 \leq d$ und $d^2 \leq 2 \Rightarrow d \in A$

Wiederspruch!

Dann die andere übrige Alternative ist $c^2 > 2$. Sei $\alpha := c^2 - 2$ und

Sei $e := c - \frac{\alpha}{5} \Rightarrow e < b \quad \forall b \in B$

$\Rightarrow e \notin B$

$$e^2 = c^2 + \frac{\alpha^2}{25} - \frac{2\alpha c}{5}$$

$$> c^2 - \frac{2\alpha c}{5}$$

Da $c \leq 2$ man bekommt

$$e^2 > c^2 - \frac{4\alpha}{5} = 2 + \alpha - \frac{4\alpha}{5} = 2 + \frac{\alpha}{5}$$

$\Rightarrow e^2 > 2$ aber $e \leq 2$

dann gilt $e \in B$ Wiederspruch!

Die Hypothese $c^2 \neq 2$ bringt nur Wiedersprüche

Dann muss $c^2 = 2$ gelten.

Damit sind wir mit dem Beweis der Behauptung fertig $\square$

II.2.5 Definition: Der Absolutbetrag einer reellen Zahl.

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$

II.2.6 Eigenschaften von dem Absolutbetrag

i) $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0$

ii) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq |x|$

iii) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |xy| = |x||y|$

iv) $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x|^2 = x^2$

II.2.7 Satz (die Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

Beweis des Satzes II.2.7

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = (x+y)(x+y)$$
$$= x^2+y^2+2xy \leq |x|^2+|y|^2+|2xy|$$
$$\leq |x|^2+|y|^2+2|x||y| = (|x|+|y|)^2$$

II.3 Supremum und Infimum

II.3.1 Definition Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heisst nach oben beschränkt falls gilt

$$\exists b \in \mathbb{R} \; ; \; \forall a \in A \quad a \leq b$$

Jede derartige b heisst eine Obere Schranke für A

Analog $A \subset \mathbb{R}$ heisst nach unten beschränkt falls gilt

$$\exists c \in \mathbb{R} \; ; \; \forall a \in A \quad c \leq a$$

c heisst untere Schranke

II.3.2 Bemerkung:

$$\neg \left(\exists b \in \mathbb{R} \,;\, \forall a \in A \quad a \leq b \right)$$

ist $\forall b \in \mathbb{R} \ \exists a \in A$ mit $b < a$

II.3.3 Beispiel

Das Intervall $\quad]-1,+1[\ = \{ x \in \mathbb{R} \,;\, -1 < x < 1 \}$

(wird auch $(-1,+1)$ notiert)

ist nach oben und nach unten beschränkt.

II.3.4 Definition (und Existenz) der kleinsten oberen Schranke

Sei $A \neq \emptyset$ und $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt

Sei $\quad B := \{ b \in \mathbb{R} \,;\, b$ ist eine obere Schranke für $A \}$

Es gilt dann selbstverständlich

$$\forall a \in A \text{ und } \forall b \in B \quad a \leq b$$

Das Vollständigkeitsaxiom gibt die Existenz von $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall a \in A \text{ und } \forall b \in B \quad a \leq c \leq b$$

Das impliziert insbesondere dass c eine obere Schranke für A ist d.h. $c \in B$ aber

$$\forall b \in B \quad c \leq b$$

c ist dann die kleinste obere Schranke für A (c ist selbstverständlich eindeutig weil die Ordnung ist total)

Wir haben dann den folgenden Satz bewiesen

Satz: Jede nicht leere nach oben beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke

$$c := \operatorname{Sup} A$$

c heisst das Supremum von A

ii) Analog besitzt jede nicht leere nach unten beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ eine grösste untere Schranke

$$d := \inf A$$

das ist das Infimum von A.

c und d können zu A gehören aber es ist nicht unbedingt der Fall

Falls $c := \operatorname{Sup} A \in A$ man sagt dass c das Maximum von A ist

Falls $d := \operatorname{Inf} A \in A$ man sagt dass d das Minimum von A ist

II.3.5 Beispiele

i) $A =]-1, +1[$

$\sup A = +1 \qquad \operatorname{Inf} A = -1$

ii) $A =]-1, +1] := \{x \in \mathbb{R} \,;\, -1 < x \leq +1\}$

$\sup A = +1 = \operatorname{Max} A$

iii) $A := \left\{ y \in \mathbb{R} \,;\, \exists x \in \mathbb{R} \text{ mit } y = \frac{2x}{1+x^2} \right\}$

Behauptung $\sup A = +1$

Beweis der Behauptung

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (1-x)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+1 \geq 2x$

$$\Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$$

Das impliziert dass $+1$ eine obere Schranke

für A bildet. Aber für $x=+1$ es gilt
$$\frac{2\times 1}{1+1^2}=1$$
Dann ist 1 die kleinste obere Schranke von A und
$$1=\max A$$ $\square$

Übung: bestimmen Sie Inf A
(Man beweist zuerst dass A nach unten beschränkt ist).

II.3.6 Satz (Archimedisches Prinzip)
$$\forall\, 0<b \quad \exists\, n\in\mathbb{N} \quad \text{mit } b<n$$

Beweis (Indirekt)
Nehmen wir an dass
$$\neg\left(\forall\, 0<b \quad \exists\, n\in\mathbb{N} \quad \text{mit } b<n\right)$$
wahr ist d.h.
$$\exists\, b>0 \quad \text{s.d.} \quad \forall\, n\in\mathbb{N} \quad n\leq b$$

$\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt.

Sei $c := \sup \mathbb{N} < +\infty$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq c$

d.h. insbesondere

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n+1 \leq c \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \; n \leq c-1$

$c-1$ ist eine obere Schranke für $\mathbb{N}$ und $c-1 < c$. c kann dann nicht die kleinste obere Schranke sein. Wiederspruch!

$\square$

II.4 ~~Die~~ euklidische Raüme

II.4.1 Definition (die euklidische Ebene / Raüme)

$$\mathbb{R}^2 := \{ (x,y) \; ; \; x, y \in \mathbb{R} \}$$

geordnete Paare von reelen Zahlen.

x und y sind beziehungsweise die erste und zweite Koordinaten von $V=(x,y)$ Vektor (~~Punkt~~ in $\mathbb{R}^2$)

$$\mathbb{R}^3 := \{(x,y,z)\ ;\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

und allgemein

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots x_n)\ ;\ x_k \in \mathbb{R}\ k=1 \dots n\}$$

geordnete n-tupel von reellen Zahlen

II.4.2 Operationen in $\mathbb{R}^n$

II.4.2 a) die Addition

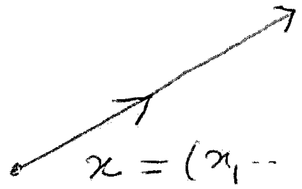
$$x = (x_1, \dots, x_n)$$
$$y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$x+y = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$$

Der Nullvektor $0=(0,\dots,0)$ ist ein Neutrales Element für $+$

$+$ ist Kommutativ und Assoziativ.

II.4.2 b) Die Skalarmultiplikation



$$\lambda x = (\lambda x_1 \dots \lambda x_n)$$

$$x = (x_1 \dots x_n)$$

Die folgende Regeln gelten

S i) Distributivitätsgesetz bez.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$$

S ii) Distributivitätsgesetz bez $+$ in $\mathbb{R}^n$

$$\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$$

S iii) Assoziativität

$$\alpha (\beta x) = (\alpha \beta) x$$

S iv) Einselelement

$$1 \cdot x = x$$

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ bildet einen <u>$\mathbb{R}$-Vektorraum</u>

Elemente von $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ heissen Vektore

"Hauptobjekte" der linearen Algebra

Alle Vektoren lassen sich in einer eindeutigen Weise als linearen Kombination von den Elementen des Standardbasis darstellen

Die Standard Basis:

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, \cdots 0) \\ e_2 = (0, 1, 0 \cdots 0) \\ \vdots \\ e_n = (0, 0 \cdots 0, 1) \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \exists! \ (x_1 \cdots x_n)$ mit

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Summe Zeichen

Die x_i heissen Standard Koordinaten von x oder Koordinaten bezüglich der Standard Basis.

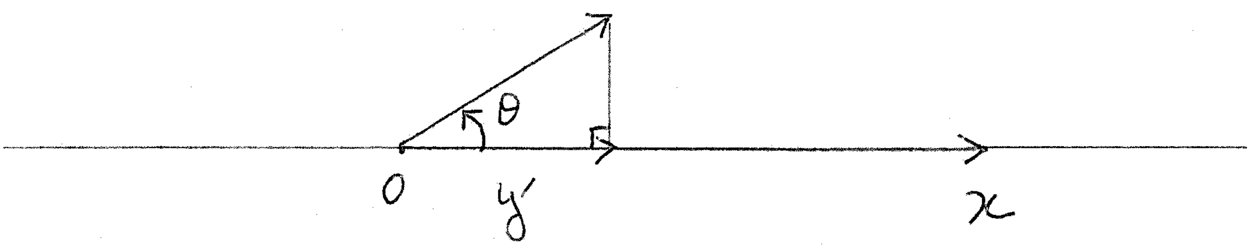
II.4.2c) Der Skalarprodukt

$\forall\, x = (x_1 \cdots x_m) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1 \cdots y_m) \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$$

Geometrische Interpretation

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \, \|y\| \cos\theta$$



$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ = quadrat der Länge vom Vektor x

$= \sum_{i=1}^{m} x_i^2$

$\|x\|$ ist die so genannte Norme von x

y' ist die Projektion von y auf der Achse $0x$

$$y' = \|y\| \cos\theta \, \frac{x}{\|x\|} \qquad \langle x, y \rangle = \langle x, y' \rangle$$

Insbesondere, falls $\|x\| \neq 0 \wedge \|y\| \neq 0$

$\langle x, y \rangle = 0 \iff$ x und y sind orthogonal zu einander

II.4.3 Der Satz von Cauchy Schwarz

Satz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ es gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

(Es kommt direkt aus $|\cos\theta| \leq 1$
aber wir beweisen Satz II.4.3 direkt
ohne die geometrische Interpretation - die
wurde noch nicht bewiesen - auszunützen)

Um den Satz von Cauchy Schwarz
zu beweisen werden wir zuerst ein
Lemma einführen.

II.4.4 Lemma (Die Young Ungleichung)

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ und $\forall \varepsilon > 0$ es gilt

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$$

Beweis des Lemmas:

$$\left(\sqrt{\varepsilon}\, a - \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \geq 0$$

$$\shortparallel$$

$$\varepsilon a^2 + \frac{b}{\varepsilon} - 2ab$$

Beweis von dem Satz II.4.3

$$2\left|\langle x, y\rangle\right| = 2 \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right|$$

$$\shortparallel$$

Übung: Sei a_1, a_2, a_3 eine Folge von reellen Zahlen beweisen Sie (Induktion)

$$A(n) \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$ Dreiecks ungleichung für n-Elemente