II.4.4 Lemma (Die Young Ungleichung)

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ und $\forall \varepsilon > 0$ es gilt

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$$

Beweis des Lemmas:

$$\left(\sqrt{\varepsilon}\, a - \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \geq 0$$

$$\parallel$$

$$\varepsilon a^2 + \frac{b}{\varepsilon} - 2ab$$

Beweis von dem Satz II.4.3

$$2\left|\langle x, y\rangle\right| = 2\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|$$

Übung: Sei a_1, a_2, a_3 eine Folge von reellen Zahlen beweisen Sie (Induktion)

$$A(n) \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Dreiecks ungleichung für n-Elemente

Dankt der Übung bekommen wir

$$2|\langle x,y\rangle| = 2\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|$$

$$\leq 2\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| = 2\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i|$$

Lemma II.4.4 $\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0$

$$2\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\varepsilon x_i^2 + \frac{1}{\varepsilon} y_i^2\right)$$

$$= \varepsilon \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

$$= \varepsilon \|x\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|y\|^2$$

Wir nehmen

$$\varepsilon := \frac{\|y\|}{\|x\|}$$

und wir bekommen

$$2|\langle x,y\rangle| \leq 2\|x\|\,\|y\| \qquad \square$$

II.4.5 Eigenschaften der euklidischen Norm

Satz.

i) Definitheit

$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \|x\| \geq 0 \qquad$ und

$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

ii) Positive Homogeneität

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

iii) Deiecksungleichung

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Beweis von dem Satz

i) und ii) sind direkte Folgerungen der Definition $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Beweis von iii)

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$$

$$= \langle x,x \rangle + \langle y,y \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y \rangle$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\|$$

Cauchy Schwarz

$$= \left(\|x\| + \|y\|\right)^2 \quad \square$$

II.5 Die komplexe Zahlen

Auf $\mathbb{N}_0$ hatten wir keine Lösung zu

$$X+1=0$$

Dann wurden die ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ eingeführt

Auf $\mathbb{Z}$ hatten wir keine Lösung zu

$$2X+1=0$$

Dann haben wir die rationnelle Zahlen $\mathbb{Q}$ eingeführt

Auf $\mathbb{Q}$ hatten wir keine Lösung zu

$$X^2 = 2$$

Dann haben wie die reelle Zahlen $\mathbb{R}$ eingeführt

Auf $\mathbb{R}$ haben wir keine Lösung zu

$$X^2 = -1$$

Dann führen wir neue Zahlen ein die die vorherigen ergänzen.

II.5.1 Die komplexe Multiplikation

Auf $\mathbb{R}^2$ führt man die folgende Operation ein

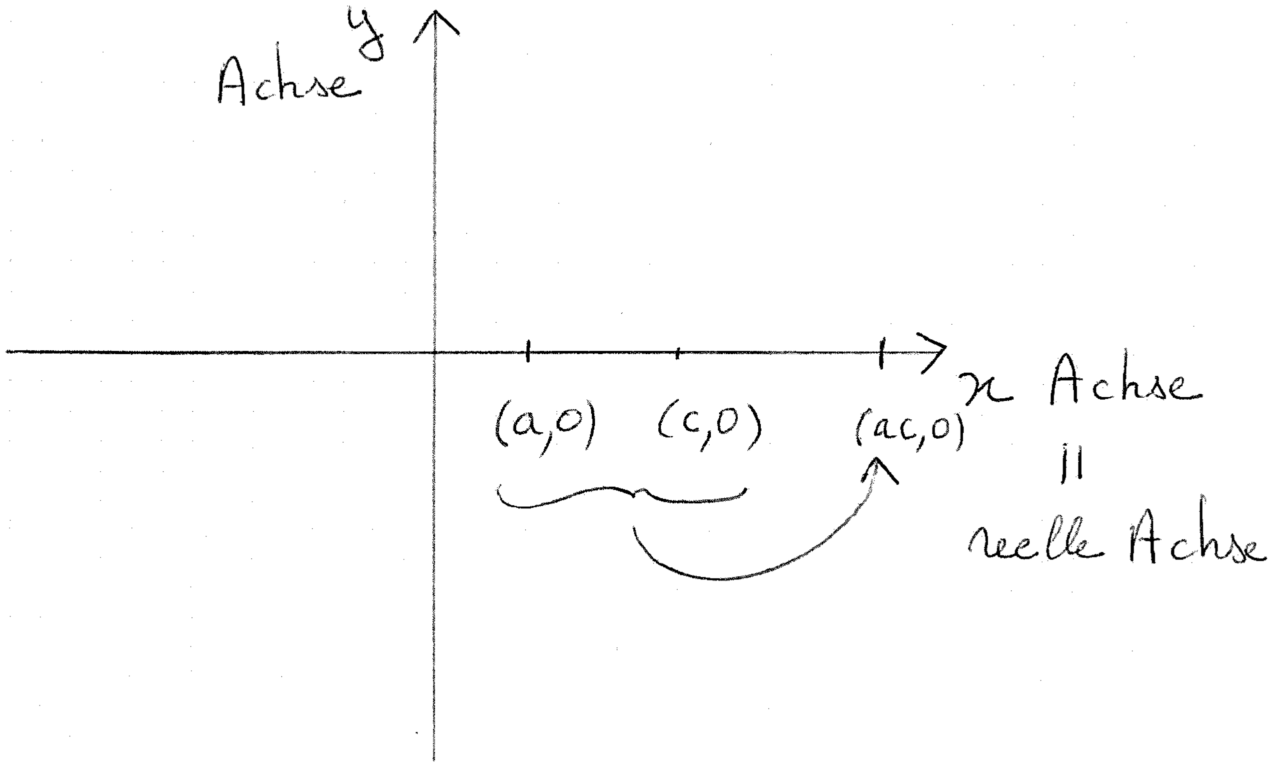
$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\big((a,b),(c,d)\big) \longmapsto (ac-bd, ad+bc)$$

$\mathbb{R}^2$ zusammen mit der Addition, die Skalar Multiplikation und diese neue Multiplikation wird $\mathbb{C}$ notiert

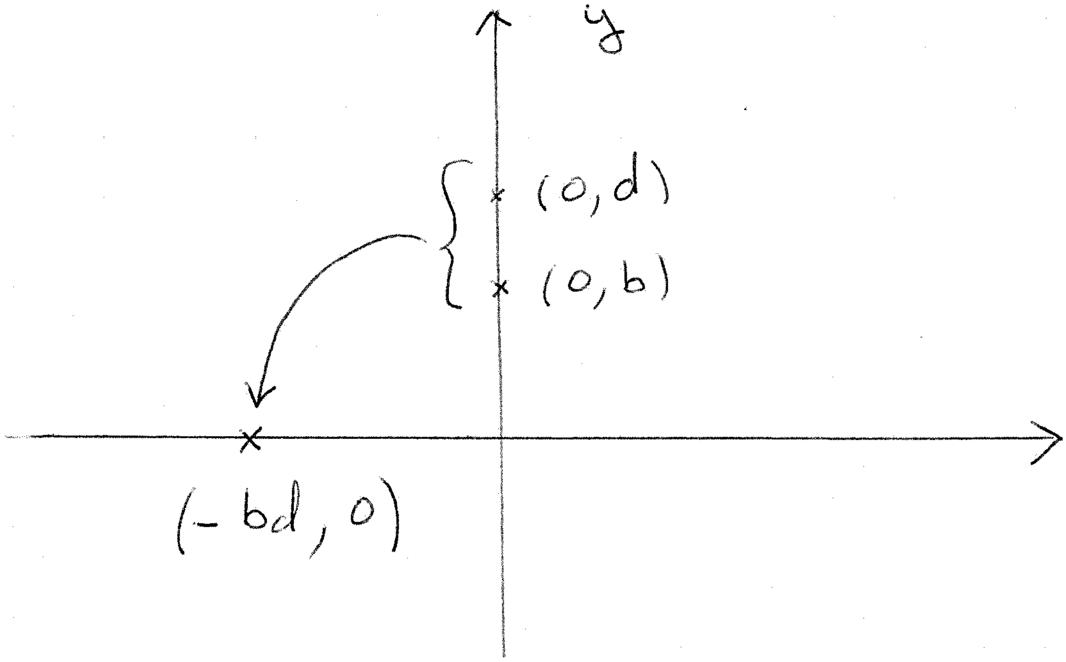
II.5.2 Bemerkungen

i)
$$(a,0)\cdot(c,0) = (ac,0)$$



Wenn man die waagrecht x-Achse von $\mathbb{R}^2$ mit dem Zahlenstrahl identifiziert, stimmt die komplexe Multiplikation mit der reellen Multiplikation überein

ii) $$(0,b)\cdot(0,d) = (-bd, 0)$$



Insbesondere $\quad (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$.

Wir haben eine Lösung zu der Gleichung

$$X^2 = -1$$

Wir nennen $\quad i := (0,1) \quad$ die imaginäre Einheit.

Die y-Achse heisst die imaginäre Achse

iii) Die komplexe Multiplikation ist

* kommutativ:

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 \qquad (a,b)\cdot(c,d) = (c,d)\cdot(a,b)$$

* Assoziativ

$\forall\ (a,b)\ ,\ (c,d)$ und (e,f) in $\mathbb{R}^2$

$$\Big((a,b)\cdot(c,d)\Big)\cdot(e,f)$$

$$= (a,b)\cdot\Big((c,d)\cdot(e,f)\Big) \qquad \text{Übung}$$

* Distributiv bezüglich der Skalar Multiplikation

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \ \forall\ (a,b)\ ,\ (c,d)$ in $\mathbb{R}^2$

$$\alpha\cdot\Big((a,b)\cdot(c,d)\Big) = \Big(\alpha\,(a,b)\Big)\cdot(c,d)$$

$$= (\alpha a, \alpha b)\cdot(c,d)$$

$$= \alpha\cdot(ac-bd\ ,\ ad+bc)$$

$$= (\alpha ac - \alpha bd\ ,\ \alpha ad + \alpha bc)$$

* Distributiv bezüglich der Addition

$\forall$ (a,b), (c,d) und (e,f) in $\mathbb{R}^2$

$$(a,b)\cdot\left[(c,d)+(e,f)\right]$$ Übung

$$=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)(e,f)$$

iv) Die Skalar Multiplikation stimmt mit der komplexen Multiplikation durch die zugehörige Zahl auf der reellen Achse:

$$\forall\ \alpha\in\mathbb{R}\quad\forall\ (a,b)\in\mathbb{C}$$

$$\alpha\ (a,b)=(\alpha a,\alpha b)$$

$$=(\alpha,0)\cdot(a,b)$$

v) Die komplexe Multiplikation besitzt ein neutrales Element

$\forall\ (a,b) \in \mathbb{C}$

$$(1,0)\cdot(a,b) = (a,b)$$

vi) Jedes nicht null Element besitzt eine Inverse

$\forall\ (a,b) \neq (0,0)$ es gilt

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

$$= \left(\frac{a\cdot a}{a^2+b^2} - \frac{b(-b)}{a^2+b^2}, a\frac{(-b)}{a^2+b^2} + b\frac{a}{a^2+b^2}\right)$$

$$= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, 0\right) = (1,0)$$

vii) Jedes Element lässt sich als linearKombination von $\underset{\substack{\| \\ 1}}{(1,0)}$ und $\underset{\substack{\| \\ i}}{(0,1)}$ schreiben

$$(a,b) = a + ib$$

a ist der reelle Teil von (a,b)

b ist der imaginäre Teil von (a,b)

Man schreibt

$$a = \mathrm{Re}\,(a,b)$$

$$b = \mathrm{Im}\,(a,b)$$

Mit dieser Notation gilt

Sei $z_1 = x_1 + iy_1$ (d.h. (x_1, y_1)) $\qquad z_2 = x_2 + iy_2$ (d.h. (x_2, y_2))

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= x_1 x_2 + x_1 i y_2 + i y_1 x_2 + i y_1 i y_2$$

$$= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 i i y_2$$

$$= x_1 x_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)\, i + y_1 (-1) y_2$$

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i\,(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Wir haben Ass. Komm Dist... ausgenützt.

Folgerung

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2$$

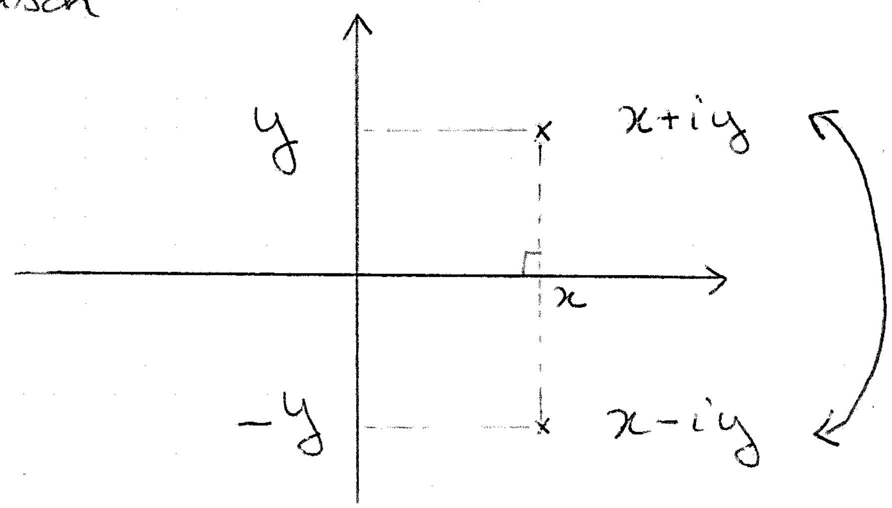
$$\operatorname{Im}(z_1 z_2) = x_1 y_2 + y_1 x_2$$

II.5.3 Die Konjugation

Definition

$$z = x + iy \longmapsto \bar{z} = x - iy$$

geometrisch



Symmetrie bez. der x Achse

II.5.4 Eigenschaften

i) $z = x + iy$

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = \|(x,y)\|^2$$

Wir haben $(x,y) \leftrightarrow z = x+iy$ identifizier[t]

die Norme von (x,y)

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

schreibt man auch

$|z|$: "Absolutbetrag von z"

ii) $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ es gilt

$$\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \qquad \text{Übung}$$

iii) $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ es gilt

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\, \bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$$
$$= x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

iv) $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ es gilt

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

Beweis von iv)

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$= z_1 \bar{z}_1 \, z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 \, |z_2|^2$$

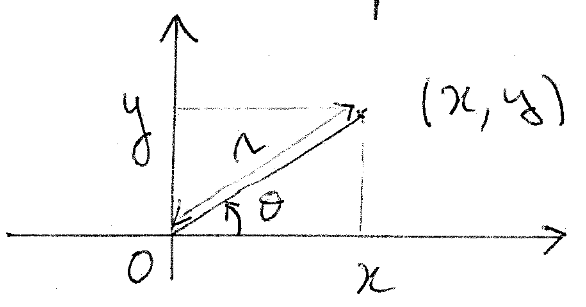
v) Eine Formel für die Inverse

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z} z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Beispiel Was ist die Inverse von $2+i$

$$\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2-i}{4+1} = \frac{2}{5} - \frac{i}{5}$$

II.5.5 Die Polarform einer komplexen Zahl und die geometrische Interpretation der komplexem Multiplikation



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

die zugehörige komplexe Zahl
kann man so schreiben

$$x+iy = r\cos\theta + i r \sin\theta$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Beobachtung
$|x+iy|$
$= r$

Die Eulersche Notation

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Lemma II.5.5 Mit dieser Notation gilt
$$\forall \varphi,\psi \in \mathbb{R} \qquad e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$$

(Das sieht formel aus wie die
Additionstheorem für die Exponentialfunktion
$$\forall t,s \in \mathbb{R} \qquad e^t e^s = e^{t+s}$$
Wir werden es in Kapitel 3 beweisen)

Beweis des Lemmas
$$e^{i\varphi}e^{i\psi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\,(\cos\psi + i\sin\psi)$$

$$= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$$
$$+ i\left(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\right)$$

Aus der Schule

$$\begin{cases} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi = \cos(\varphi+\psi) \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi = \sin(\varphi+\psi) \end{cases}$$

Dann bekommen wir

$$e^{i\varphi}e^{i\psi} = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)$$

$\square$

Somit folgt die geometrische Interpretation der komplexen Multiplikation

$$\begin{cases} z = r e^{i\varphi} \\ w = \rho e^{i\psi} \end{cases} \Rightarrow zw = r\rho e^{i(\varphi+\psi)}$$

Die Absolutbeträge wurden multipliziert während die Winkel wurden addiert

Beispiel : (1) Berechnen Sie die Polarform von $1+i$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

(2) Berechnen Sie in zwei Weisen $(1+i)^2$

Erste weise
$$(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = 1-1+i(1+1)$$
$$= 2i$$

Zweite Weise
$$(1+i)^2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\, \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$$

II.5.8 Die q-te Wurzel einer komplexen Zahl

Beobachtung Sei $c \in \mathbb{C}$ beliebig, $c \neq 0$ es existiert genau zwei Unterschiedlichen Lösungen zu der Gleichung $z^2 = c$

Da $c \neq 0$ kann man c so schreiben

$c = r e^{i\varphi}$ wobei $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$

Sei $\sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}} = z$

$$z^2 = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}\, \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}} = r e^{i\varphi}$$

Also $\sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$ ist eine Lösung aber

$-\sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}+\pi}$ ist auch eine

Lösung. Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 - c = \left(z - \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)\left(z + \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)$$

Dann $z^2 - c = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \text{oder} \\ z = \sqrt{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)} \end{cases}$

Allgemein: Sei $q \in \mathbb{N}$ $q > 2$

Was sind die Lösungen von $z^q = c$

$\sqrt[q]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{q}}$ ist eine Lösung...

Es gibt weitere Lösungen:

$$\left.\begin{array}{l}\forall k \in \{0 \ldots q-1\} \\ \sqrt[q]{r}\; e^{i\frac{\varphi}{q} + i\frac{2\pi k}{q}}\end{array}\right\} q \text{ Lösungen}$$

Sind alle Lösungen von dieser Form?

Antwort: Ja. Das beweisen wir in dem nächsten Abschnitt

II.5.9 Die algebraische Vollständigkeit von $\mathbb{C}$

Der Hauptgrund warum $\mathbb{C}$ eingeführt wurde

Satz (Der Fundamentalsatz der Algebra)

Sei $n \geq 1$ Jedes Polynom

vom Grad $n \geq 1$ in $\mathbb{C}$

d.h. von der Form $a_i \in \mathbb{C}$

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

hat in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle $\square$

Das ist nicht der Fall in $\mathbb{R}$:

$$P(x) = x^2 + 1$$

II.5.10 Folgerung von dem Fundamentalsatz der Algebra:

Satz: Sei $n \geq 1$ und

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

ein Polynom vom Grad n in $\mathbb{C}$ ($a_i \in \mathbb{C}$). i) Dann lässt sich P in der folgenden Form schreiben