vom Grad $n \geq 1$ im $\mathbb{C}$

d.h. von der Form $\qquad a_i \in \mathbb{C}$

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

hat in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle $\square$

Das ist nicht der Fall in $\mathbb{R}$:

$$P(x) = x^2 + 1$$

II.5.10 Folgerung von dem Fundamentalsatz der Algebra:

Satz: Sei $n \geq 1$ und

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

ein Polynom vom Grad n in $\mathbb{C}$ ($a_i \in \mathbb{C}$). i) Dann lässt sich P in der folgenden Form schreiben

$$P(z) = (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n) = \prod_{j=1}^{n}(z-z_j)$$

wobei z_j die Nullstellen von P sind.

(Es wird nicht ausgeschlossen dass $z_i = z_j$ für $i \neq j$ z.B.

$$P(z) = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = (z-1)(z-1)$$)

ii) Ein Polynom vom Grad n in $\mathbb{C}$ hat höchstens n unterschiedlichen Nullstellen

iii) Falls $z_1 \cdots z_n$ n unterschiedlichen Nullstellen von einem Polynom $P(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$ vom Grad n sind dann gilt $a_n = 1$

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n}(z-z_j)$$

Wir beweisen dass

Satz II.5.9 $\Longrightarrow$ Satz II.5.10

(Der Satz II.5.9 wird erst in der Analysis 2 bewiesen.)

Dafür brauchen wir das folgende Lemma

II.5.11 Lemma (Der binomische Lehrsatz)

$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

wobei $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ Binomialkoeffizient

und $n! := 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$

$0! := 1$

Beispiele

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\binom{2}{1} = 2 \qquad \binom{2}{0} = 1$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\frac{3!}{2!\,1!} = \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 = \frac{3!}{1!\,2!}$$

...

Der binomische Lehrsatz wird in der nächsten Serie bewiesen

Der Binomialkoeffizient

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

weitere Notation

ist die Anzahl von Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$ mit genau k Elementen.

Diese Koeffiziente spielen eine Hauptrolle insbesondere in einer Branche der Mathematik : die Kombinatorik

Beweis von dem Satz II.5.10

Induktionsbeweis. $n \geq 1$

$A(n)$: Jedes Polynom vom Grad

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

kann so geschrieben werden

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$$

wobei z_j die Nullstellen von P sind

$A(1)$: $P(z) = z + a_0$

ist wahr

$z_1 = -a_0$ ist die Nullstelle von P

Nehmen wir an dass $A(n-1)$ wahr ist

Satz II.5.9 $\Rightarrow$ $P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$
besitzt eine Nullstelle z_0

Wir verschieben die Variable z und wir führen eine neue Variable ein

$$w := z - z_0 \iff z = w + z_0$$

Sei
$$Q(w) := P(w + z_0)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (w+z_0)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} w^j z_0^{k-j}$$

$(a_n = 1)$

$$= \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k \geq j} a_k \binom{k}{j} z_0^{k-j} \right)}_{b_j} w^j = \sum_{j=0}^{n} b_j w^j$$

$$b_n = a_n = 1$$

$$Q(0) = 0 \Rightarrow b_0 = 0$$

$$\| \quad P(z_0)$$

$w = 0$

$\Updownarrow$

$z = z_0$

$$Q(w) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k w^k + w^n$$

$$= w \left[w^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k w^{k-1} \right]$$

$$= w \left[w^{n-1} + \sum_{\ell=0}^{n-2} b_{\ell+1} w^{\ell} \right]$$

$$(\ell = k-1)$$

Sei

$$R(w) := w^{n-1} + \sum_{\ell=0}^{n-2} b_{\ell+1} w^{\ell}$$

Wir wenden zu R die Induktionshypothese an

d.h.

$$R(w) = \prod_{j=1}^{n-1} (w - w_j)$$

Dann bekommen wir

$$Q(w) = w \prod_{j=1}^{n-1} (w - w_j)$$

das impliziert

$$P(z) = (z - z_0) \prod_{j=1}^{n-1} (z - z_0 - w_j)$$

und $P(z) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (z = z_0) \vee \left(\exists j \in \{1 .. n-1\} \ z = z_0 + w_j \right)$$

die Nullstellen von P sind

$$z_0, \ z_0 + w_1, \ldots \ z_0 + w_{n-1}$$

$\Rightarrow A(n)$

$\square$

III FOLGEN UND REIHEN

III.1 Definitionen und Beispiele

III.1.1 Definition

Eine Folge ist eine Abbildung

Von $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$ nach
- $\mathbb{R}$ relle Folge
- bezw. $\mathbb{C}$ komplexe Folge
- bzw $\mathbb{R}^n$ Vektorwertige Folge

Es wird so notiert

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{bzw} \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

III.1.2 Beispiele

i) $a_n = 2^n$ oder $a_n = n$

(Explizit)

ii) $a_0 = 0 \qquad a_n = a_{n-1} + 2 \qquad n \geq 1$

(Induktive Definition)

III.1.3 Definition einer Reihe

Man nimmt eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ oder $\mathbb{N}$

Man betrachtet die folgende parzielle Summen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Reihe

III.1.4 Beispiel von einer Reihe

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

Bemerkung: In diesem Beispiel kann die Summe explizit ausgerechnet werden.

$$(1-q)\,(1+q+q^2+\dots+q^n)$$

$$= 1+q+q^2+q^3+q^n-(q+q^2+q^3+\dots+q^{n+1})$$

annulieren sich einander

$$= 1-q^{n+1} \qquad \text{(nur zwei Terme "überleben")}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

III.2 Grenzwert einer Folge

III.2.1 Motivation und Beispiele

In diesem Abschnitt es geht darum das "Verhalten" einer Folge wenn n grösser und grösser wird zu beschreiben

Beispiele

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$

in diesem Beispielt divergiert

$a_n = n$ gegen + Unendlich

Man schreibt $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$

Umgekehrt für $a_n = -n$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

Wir definieren dieses Verhalten rigoros in dem nächsten Abschnitt.

ii) $a_n := \frac{1}{n}$

a_n wird kleiner und kleiner aber immer positive. Die Folge konvergiert gegen 0 (wird bald rigoros definiert)

iii) $a_n = n + (-1)^n n + \frac{1}{n}$

Diese Folge hat ein gemischtes

verhalten

$$a_{2p} = 2p + \frac{1}{2p}$$

dieser Teil der Folge divergiert gegen $+\infty$

$$a_{2p+1} = \frac{1}{2p+1}$$

dieser Teil der Folge (die ungerade Terme) konvergiert gegen 0

III.2.2 Definitionen der Divergenz gegen $\pm\infty$ oder der Konvergenz einer reellen Folge

Definition i) Man sagt dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $+\infty$ (bezw $-\infty$) divergiert falls

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n \geq A$$

(bezw $a_n \leq A$)

Wenn das wahr ist man schreibt

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty \quad (\text{bzw } -\infty)$$

ii) Man sagt dass eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N$$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

Man schreibt in dem Fall

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

a heisst der Grenzwert oder der Limes der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Falls eine Folge nicht konvergiert man

sagt dass die Folge divergiert
(das bedeutet nicht unbedingt dass
die Folge gegen $+\infty$ oder $-\infty$
divergiert z.B. $a_n = n + (-1)^n n + \frac{1}{n}$)

III.2.3 Beispiele

i) Rigoros Beweis von $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Sei $\varepsilon > 0$. Vom Archimedischen Prinzip

$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_\varepsilon \quad 0 \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

ii) Behauptung

$\forall q \in (0,1) \qquad \lim_{n \to \infty} q^n = 0$

Um diese Behauptung zu beweisen führen wir eine neue Ungleichung ein

Lemma (Die Bernoullische Ungleichung)

$\forall n \in \mathbb{N}$ und $\forall x \geq 0$ es gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Beweis des Lemmas

Erinnerung aus der Schule

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Beweis von dieser Identität

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$$

$k+1=\ell$ in der ersten Summe

$$= \sum_{\ell=1}^{n} a^{\ell} b^{n-\ell} - \sum_{k=0}^{n-1} a^{k} b^{n-k}$$

$$= a^{n} + \cancel{\sum_{\ell=1}^{n-1} a^{\ell} b^{n-\ell}} - \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} a^{k} b^{n-k}} - b^{n}$$

diese 2 Terme annulieren sich einander

Wir wenden diese Identität mit

$a := 1+x$ und $b=1$ an

$$(1+x)^{n}-1 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (1+x)^{k}\right) x$$

n Terme

$$(1+x)^{k} \geqslant 1$$

$$\Rightarrow \quad (1+x)^{n}-1 \geqslant n x \qquad \square$$

Beweis der Behauptung $\qquad q<1 \Rightarrow \frac{1}{q}>1$

Sei $x := \frac{1}{q}-1$

Bernoullische Ungleichung impliziert

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{q} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{q}\right)^n \geq n\left(\frac{1}{q} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad q^n \leq \frac{q}{1-q}\,\frac{1}{n}$$

Sei $\varepsilon > 0$

Arkimedisches Prinzip liefert die Existenz von $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$n_\varepsilon \geq \frac{q}{1-q}\,\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_\varepsilon \quad n \geq \frac{q}{1-q}\,\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon \geq \frac{q}{1-q}\,\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad q^n \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \text{Behauptung}$$

iii) Behauptung

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k$$

$$\geq \binom{n}{2} \varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2$$

$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad n_\varepsilon \geq \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$

$\Rightarrow \forall n \geq n_\varepsilon \quad n-1 \geq \frac{2}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow \frac{(n-1)}{2} \varepsilon^2 \geq 1$

$\Rightarrow \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad (1+\varepsilon)^n \geq n$

$\Rightarrow \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad 1+\varepsilon \geq \sqrt[n]{n}$

Aber $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{1} = 1$

$\Rightarrow \forall n \geq n_\varepsilon \quad 0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \varepsilon$

$\Rightarrow$ die Behauptung