III. 2.4 Bemerkungen

i) Jede konvergierende Folge ist nach oben und nach unten beschränkt

d. h.

$$A := \{ a_n \, ; \, n \in \mathbb{N} \}$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \sup A < +\infty \\ \text{und} \\ -\infty < \inf A \end{cases}$$

Beweis

Da $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a \qquad \exists \, N \in \mathbb{N}$

s. d. $\forall \, n \geq N \qquad |a_n - a| < 1$

$$\Longrightarrow$$

$$\forall \, n \geq N \qquad -1 + a < a_n < 1 + a$$

$\{a_1, \dots a_{N-1}\}$ ist endlich.

$\exists \; k \in \{1 \dots N-1\}$ so dass

$$\forall n \leq N \qquad a_n \leq a_k$$

$$\Rightarrow \quad \forall a_n \in A \quad a_n \leq \mathrm{Max}\{a_k, 1+a\}$$

$$\Rightarrow \quad \sup A < +\infty$$

in einer ähnlichen weise man beweist

$$-\infty < \inf A$$

⚠ Eine beschränkte Folge konvergiert nicht unbedingt. Z.B.

$$a_n := (-1)^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n - a_{n+1}| = 2$$

III.3 Konvergenzkriterien

Wir suchen einfache Kriterien aus welchen wir die Konfergenz einer Folge deduzieren können.

$$\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}$$

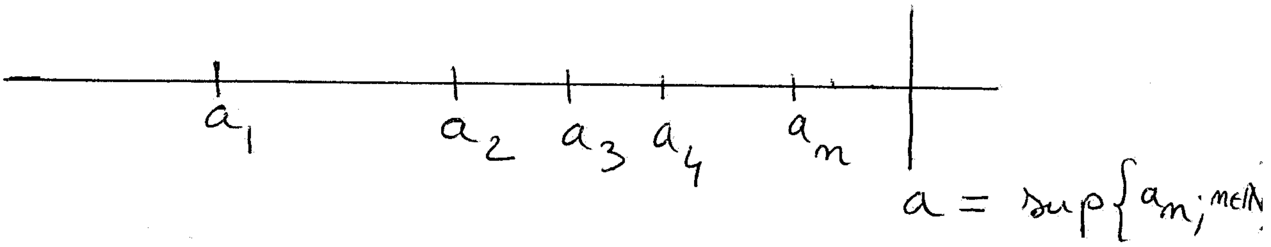
III.3.1 Satz der Monotonkonvergenz

Satz Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge die nach oben beschränkt ist und monoton wachsend (bzw nach unten beschränkt und monoton fallend)

Dann ist a_n konvergent und

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$$

(bezw $\lim_{n \to \infty} a_n = \inf\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$)



III.3.2 Beispiel

Sei $q \in \mathbb{N}$

$$a_n := \sqrt[q]{n^{-1}}$$

Sei $0 < a < b$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt[9]{a} < \sqrt[9]{b}$$

(Falls es nicht der Fall wäre hätten wir

$$\sqrt[9]{a} \geq \sqrt[9]{b}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sqrt[9]{a} \cdots \sqrt[9]{a}}_{9 \text{ Mal}} \geq \underbrace{\sqrt[9]{b} \cdots \sqrt[9]{b}}_{9 \text{ Mal}}$$

$\Rightarrow \quad a \geq b$ Wiederspruch!)

Dann $n+1 \geq n \Rightarrow \sqrt[9]{n+1} \geq \sqrt[9]{n}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt[9]{n}} \geq \frac{1}{\sqrt[9]{n+1}}$$

$a_n = \dfrac{1}{\sqrt[9]{n}}$ ist Monoton Fallend

und $a_n \geq 0$ dann wissen wir dass a_n konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$ Archimedisches Prinzip $\Rightarrow$

$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon^q}$

$\Rightarrow \sqrt[q]{n_\varepsilon^{-1}} \leq \varepsilon$

$\forall n \geq n_\varepsilon \quad \sqrt[q]{n^{-1}} \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[q]{n^{-1}} = 0$

Beweis des Satzes III.3.1

$A = \{ a_n \, ; \, n \in \mathbb{N} \}$

A wird nach oben beschränkt und besitzt dann einen Supremum

Sei $a := \operatorname{Sup} A$

Behauptung $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

Beweis der Behauptung

Da a die kleinste obere Schranke ist

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$-\varepsilon + a \leq a_{n_\varepsilon}$$

(sonst hätten wir $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a - \varepsilon$

und a wäre nicht die kleinste obere Schranke)

a_n ist Monoton wachsend. Dann haben wir $\forall n \geq n_\varepsilon \qquad -\varepsilon + a \leq a_n \leq a$

$$\Rightarrow \quad |a_n - a| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ die Behauptung.

III.3.3 Eigenschaften von konvergierenden Folgen

Satz Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die beide konvergieren

Dann gilt

i) $a_n + b_n$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

ii) $a_n b_n$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

iii) Falls zusätzlich $\forall n \in \mathbb{N}\ b_n \neq 0$

<u>und</u> $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, dann konvergiert

$\dfrac{a_n}{b_n}$ und es gilt

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

iv) Falls es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$\forall n \geq n_0 \quad a_n \leq b_n$ dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$$

v) Falls $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$\forall n \geqslant n_0 \qquad |a_n| \leqslant |b_n|$$

und $\lim_{n\to\infty} |b_n| = 0$ dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Beweis vom Satz III.3.3 i) ii) und v)
(eine Auswahl)

Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$

Sei $\varepsilon > 0$

$\exists\, n_\varepsilon(a) \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \geqslant n_\varepsilon(a)$ $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists\, n_\varepsilon(b) \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \geqslant n_\varepsilon(b)$ $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Longrightarrow \forall n \geqslant \operatorname{Max}\{n_\varepsilon(a)\,;\, n_\varepsilon(b)\}$

$$|a_n + b_n - a - b| = |a_n - a + b_n - b|$$

$$\underset{DU}{\leqslant} |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Beweis von ii)

$$A := \{|a_n|;\ n \in \mathbb{N}\}$$

$$B := \{|b_n|;\ n \in \mathbb{N}\}$$

Sei $\alpha = \sup A + 1$ und Sei $\beta = \sup B + 1$

Sei $\varepsilon > 0$

$\exists\, n_\varepsilon(a)$; $\forall n \geqslant n_\varepsilon(a)$ $|a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\beta}$

$\exists\, n_\varepsilon(b)$; $\forall n \geqslant n_\varepsilon(b)$ $|b_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\alpha}$

$\Rightarrow \forall n \geqslant \operatorname{Max}\{n_\varepsilon(a);\ n_\varepsilon(b)\}$

$$|a_n b_n - ab| \leqslant |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)|$$

$$\underset{DU}{\leqslant} |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)|$$

$$\leq \alpha |b_n - b| + \beta |a_n - a|$$

$$\leq \frac{\alpha \varepsilon}{2\alpha} + \frac{\beta \varepsilon}{2\beta} = \varepsilon$$

Beweis von v)

Da $\lim_{n\to\infty} |b_n| = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad n \geq N_\varepsilon \quad |b_n| \leq \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0 \qquad \forall n \geq \max\{N_\varepsilon, n_0\}$

$$|a_n| \leq |b_n| \leq \varepsilon \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

III.3.4 Beispiele von Anwendungen

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

Grund $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

III.3.3 v) $\Rightarrow$ die Behauptung i)

ETH zürich

ii) Sei $p, q \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{q}}} = 0$$

Wir wissen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{n}} = 0$

$$\frac{1}{n^{\frac{p}{q}}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt[q]{n}} \cdots \frac{1}{\sqrt[q]{n}}}_{p \text{ Mal}}$$

III.3.3 ii) $\Rightarrow$ die Behauptung $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{q}}} = 0$

iii) Sei $u_n := \frac{3n^4 + 7n^3 + 5}{2n^4 + 6n^2 + 3}$

$$u_n = \frac{3 + \frac{7}{n} + \frac{5}{n^4}}{2 + \frac{6}{n^2} + \frac{3}{n^4}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} 3 + \frac{7}{n} + \frac{5}{n^4} = 3 \\ \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{6}{n^2} + \frac{3}{n^4} = 2 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{III.3.3 iii)}} \lim u_n = \frac{3}{2}$$

iv) Sei $p \in \mathbb{N}$ und $q \in (0,1)$

Behauptung $\lim_{n\to\infty} n^p q^n = 0$

$$\left.\begin{array}{l} n^p \to \infty \\ q^n \to 0 \end{array}\right\}$$ aber q^n geht "schneller" gegen 0 als n^p gegen $+\infty$ divergiert.

Beweis der Behauptung.

Wir schreiben $n^p q^n = \left(\left(n^{\frac{p}{n}}\right) q \right)^n$

Wir erinnern uns daran:

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} n^{\frac{p}{n}} = 1$$

III.3.3 ii)

$$\exists\, N \,;\, \forall n \geq N \qquad n^{\frac{p}{n}} \leq \frac{q+1}{2q}$$

Der grund dafür ist dass

$$\frac{q+1}{2q} > 1$$

Dann $\forall n \geq N$ es gilt

$$\left(n^{\frac{p}{n}}\, q\right)^n \leqslant \left(\frac{q+1}{2q}\, q\right)^n = \left(\frac{q+1}{2}\right)^n$$

Aber $\frac{q+1}{2} < 1$. Das impliziert

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{q+1}{2}\right)^n = 0$$

III.3.3 $\nu) \Longrightarrow$

$$\lim_{n \to \infty} n^p q^n = 0$$

$\square$

III.4 Teilfolgen und Häufungspunkte

Motivation. Wir betrachten z.B.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Wir haben schon festgestellt dass a_n konvergiert nicht.

Aber $(a_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ beide konvergieren. Sie heissen Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Die allgemeine Frage die wir in diesem Abschnitt stellen ist die folgende:

1) Falls eine Folge nicht konvergiert, konvergiert trotzdem eine Teilfolge?

2) Was sind alle möglische Limes

von solchen Teilfolgen?

III.4.1 Definition Sei $\Lambda \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge und sei

$$\begin{aligned} l : \mathbb{N} &\longrightarrow \Lambda \\ n &\longmapsto l(n) \end{aligned}$$

eine strenge monotone Abzählung von Λ

(Anders gesagt l ist eine strenge wachsende Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$: $l(n+1) > l(n)$)

Dann heisst die Folge

$$\left(a_{l(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

III.4.2 Beispiel

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left((-1)^n n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\left(a_{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \begin{cases} \Lambda = \{2^n; n\in\mathbb{N}\} \\ \ell(n) = 2^n \end{cases}$$

ist eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

III.4.3 Definition

$a\in\mathbb{R}$ heisst Häufungspunkt von einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(a_{\ell(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt mit

$$\lim_{n\to\infty} a_{\ell(n)} = a$$

III.4.4 Beispiel.

Sei $a_n := \dfrac{n^2 + (-1)^n n^2 + n}{n^2}$

2 und 0 sind zwei Häufungspunkte für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$(a_{2p})_{p\in\mathbb{N}} = \frac{2\,(2p)^2+(2p)}{(2p)^2} = 2+\frac{1}{2p}$$

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}=0 \Rightarrow \lim_{p\to\infty} a_{2p}=2$$

$$(a_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}} = \frac{2p+1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{2p+1}$$

$$\underbrace{\lim_{p\to\infty}\frac{1}{2p}=0 \qquad 0\leq\frac{1}{2p+1}\leq\frac{1}{2p}}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{p\to\infty} a_{2p+1}=0$$

III.4.5 Bemerkung (Charakterisierung eines Häufungspunkts)

$a \in \mathbb{R}$ ist einer Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ "genau dann wenn" (d.h. $\Longleftrightarrow$)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell > n$

und $\quad |a_\ell - a| < \varepsilon$

Beweis dieser Aussage

Wir beweise 2 Implikationen:

zuerst (A1) a HP $\Longrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell > n$ und

$|a_\ell - a| < \varepsilon$

Beweis von (A1)

Sei a ein HP (d.h. $\exists \ell$ streng wachsend von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ so dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\ell(n)} = a$)

Sei $\varepsilon > 0$ und sei $N \in \mathbb{N}$

Da $\lim_{n \to \infty} a_{l(n)} = a$

$\exists\, n_\varepsilon$ s.d. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$

$$|a_{l(n)} - a| < \varepsilon$$

wir haben $\lim_{n \to \infty} l(n) = +\infty$

dann es existiert $n \geq n_\varepsilon$ mit

$$l(n) > N$$

für solche n es gilt $|a_{l(n)} - a| < \varepsilon$.

(A1) wird bewiesen

Dann beweisen wir (A2):

$\forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, l \in \mathbb{N}$ mit $l > n$ und $|a_l - a| < \varepsilon \Longrightarrow a$ ist ein HP von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Die Teilfolge $(\ell(k))_{k\in\mathbb{N}}$

wird nach Induktion gebaut

$n \geq 1$

$B(n)$: $\forall\ 1 \leq k \leq n\ \exists\ \ell(k)$

mit $\ell(k) < \ell(k+1)$ und
$(k<n)$

$$|a_{\ell(k)} - a| \leq \frac{1}{k}$$

$B(1)$ ist wahr

$\varepsilon = 1 \quad \exists\ \ell_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{\ell_1} - a| < 1$

wir nehmen $\ell(1) := \ell_1$

Beweis von $B(n) \Rightarrow B(n+1)$

Wir nehmen an dass $\ell(k)$ existiert

mit $\ell(k) < \ell(k+1)$ für $k < n$

und $|a_{\ell(k)} - a| \leq \frac{1}{k}$

Sei $\varepsilon := \frac{1}{n+1}$ und $N = l(n)$

Nach der Hypothese $\exists\, l > N = l(n)$

mit $|a_l - a| < \frac{1}{n+1}$

wir nehmen $l(n+1) := l$

$\Rightarrow B(n+1)$ $\square$

III.4.4 Der Limes superior und der Limes inferior einer beschränkten Folge

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge d.h. $\exists M \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M$$

Sei

$$c_k := \inf\{a_n \; ; \; n \geq k\}$$

$$b_k := \sup\{a_n \; ; \; n \geq k\}$$

c_k ist wachsend, b_k ist fallend

$$-M \leq c_1 \cdots \leq c_k \leq \cdots \leq b_k \cdots \leq b_1 \leq M$$

c_k und b_k sind beide monotone und beschränkt. Dann die beide Folgen konvergieren

Sei
$$\begin{cases} b := \lim\limits_{k \to \infty} b_k \\ c := \lim\limits_{k \to \infty} c_k \end{cases}$$

und es gilt

$$c \leq b$$

Wir schreiben

$$c := \liminf_{k \to \infty} a_k = \underline{\lim}_{k \to \infty} a_k$$

$$b := \limsup_{k \to \infty} a_k = \overline{\lim}_{k \to \infty} a_k .$$

Man sagt dass c der "Limsup" von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist und dass b der "Liminf" von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

III.4.5 Lemma. b und c sind bzw die grösste und die kleinste Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beweis vom Lemma III.4.5

Es ist klar dass b und c HP sind.
Wir machen einen indirekten Beweis von der Aussage

Falls es nicht der Fall wäre z.B. falls b nicht der grösste HP von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wäre, dann hätten wir $\exists\, a > b$ mit

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\, l > n$ mit

$$|a_l - a| < \varepsilon$$

Wir nehmen $\varepsilon = \frac{b+a}{2} - b = \frac{a-b}{2}$

$$\Rightarrow \quad a_l - a > -\frac{b+a}{2} + b$$

$$\Rightarrow \quad a_l > \frac{a-b}{2} + b > b$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sup\{a_n \,;\, n \geq k\}}_{= b_k} \geq \frac{a-b}{2} + b$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} b_k \geq b + \frac{a-b}{2} > b$$

Wiederspruch! $\square$

III.4.6 Folgerung (Beweis Serie 5)

Eine beschränkte Folge konvergiert genau dann wenn diese Folge einen Häufungspunkt besitzt d. h.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$$

III.4.7 Der Satz von Bolzano Weierstrass

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt mindestens eine Teilfolge die konvergiert (einen Häufungspunkt)

Beweis: $$-\infty < \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n < +\infty$$