III.4.8 Übung

Sei $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so dass

$$\begin{cases} g_1 = 1 \\ g_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{g_n} \qquad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Was sind die Häufungspunkte von $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Beobachtung 1: g_n ist nach oben und nach unten beschränkt

Beweis der Beobachtung:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n > 0$ (nach Induktion)

Das impliziert $g_{n+1} > 1 \qquad \left(g_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{g_n} \right)$

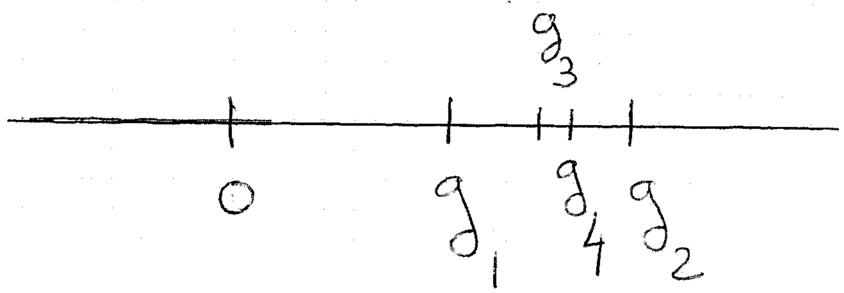
$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{g_n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad g_{n+1} \leq 2$$

Also $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq g_n \leq 2$

Beobachtung 2: g_n ist nicht Monoton

$$g_1 = 1 \qquad g_2 = 2 \qquad g_3 = \frac{3}{2} \qquad g_4 = \frac{5}{3} \quad \dots$$



Bemerkung

$$g_{n+2} = 1 + \frac{1}{g_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{g_n}} = 1 + \frac{g_n}{g_n + 1}$$

$$= 1 + \frac{g_n + 1 - 1}{g_n + 1} = 2 - \frac{1}{g_n + 1}$$

$$\Rightarrow g_{n+2} - g_n = \frac{1}{g_{n-2} + 1} - \frac{1}{g_n + 1} \quad \Longrightarrow$$

$$g_{n+2} - g_n = \frac{g_n - g_{n-2}}{(1+g_n)(1+g_{n-2})}$$

$\Rightarrow$ Vorzeichen von $g_{n+2} - g_n$ = Vorzeichen von $g_n - g_{n-2}$

$g_3 - g_1 = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}$

$g_{2p+1} - g_{2p-1} > 0$

$g_4 - g_2 = -\frac{1}{3} < 0$

$\Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}$

$g_{2p+2} - g_{2p} < 0$

Also $(g_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ ist wachsend und beschränkt

un $(g_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ ist fallend und beschränkt

Satz der Monotonkonvergenz $\Rightarrow$

$\exists\, a \in [1,2]$ so dass

$$\lim_{p \to +\infty} g_{2p} = a$$

$\exists\, b \in [1,2]$ so dass

$$\lim_{p \to \infty} g_{2p+1} = b$$

Da $g_{2p+1} = 1 + \frac{1}{g_{2p}}$ es gilt

$$b = \lim_{p \to \infty} g_{2p+1} = 1 + \frac{1}{\lim_{p \to \infty} g_{2p}}$$

$$= 1 + \frac{1}{a} \Rightarrow ab = a+1$$

Und in einer ähnlichen Weise

$$a = 1 + \frac{1}{b}$$

$\Rightarrow ab = b+1$ dann $a = b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

III.5 Cauchy Kriterium

III.5.1 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst Cauchy Folge falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \; ; \; \forall n, m \geq N$$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

III.5.2 Satz (Cauchy Kriterium)

Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind äquivalent

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent

ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy Folge

Beweis vom Satz III.5.2

Beweis von i) $\Rightarrow$ ii)

Sei $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$; $\forall n \geq N$ $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \quad \forall n, m \geq N \quad |a_n - a_m| < |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Es gilt für alle $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy Folge

Beweis von ii) $\Rightarrow$ i)

Behauptung 1 $\quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt

Beweis der Behauptung

Wir nehmen $\varepsilon = 1$

$\exists N$ s.d. $\forall \; n, m \geq N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon = 1$

insbesondere $\forall n \geq N \quad |a_n - a_N| < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad a_N - \varepsilon < a_n < a_N + \varepsilon$

$A := \{a_n;\; n \in \mathbb{N}\}$

$\mathrm{Min}\{a_N - \varepsilon, a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\} \leq \inf A$ und

$$\sup A \leq \operatorname{Max}\{a_N+\varepsilon, a_0, a_1 \dots a_{N-1}\}$$

$\Rightarrow$ Behauptung 1

Behauptung 2 $\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$

Wiederholung aus III.4

$$\begin{cases} b_k = \sup\{a_n \,;\, n \geq k\} \\ c_k = \inf\{a_n \,;\, n \geq k\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{k\to\infty} b_k = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = b \\ \lim_{k\to\infty} c_k = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = c \end{cases}$$

Sei $\varepsilon > 0$ und N so dass $\forall\, n, m \geq N$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall\, k > N \qquad |b_k - c_k| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \quad |b - c| \leq \varepsilon$

Es gilt für alle $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$b = c$$

$\Rightarrow$ Behauptung 2 $\Rightarrow$ a_n konvergiert.

III.5.3 Beispiel und Gegenbeispiel

i) die harmonische Reihe

$$a_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Es gilt $\quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1} > a_n$

$\Rightarrow \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend

Dann konvergiert (a_n) genau dann wenn $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist sonst divergiert a_n nach $+\infty$

Beobachtung

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$a_{2^\ell} - a_2 = a_{2^\ell} - a_{2^{\ell-1}} + a_{2^{\ell-1}} - a_{2^{\ell-2}}$$

$$+ \cdots + a_4 - a_2$$

$$\geq \frac{\ell-1}{2}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{\ell \to \infty} a_{2^\ell} = +\infty \quad \Rightarrow \quad a_n$ divergiert gegen $+\infty$

(a_n) ist keine Cauchy Folge.

ii) Die alternierende harmonische Reihe

$$b_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Beobachtung

$$b_{2p+2} - b_{2p} = -\frac{1}{2p+2} + \frac{1}{2p+1} > 0$$

$$b_{2p+1} - b_{2p-1} = \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p} < 0$$

d.h. $(b_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ ist wachsend

und (b_{2p+1}) ist monoton fallend

Es gilt $b_{2p+2} - b_{2p+1} = -\frac{1}{2p+2} < 0$

Da b_{2p+1} fallend ist man bekommt

$$b_{2p+2} < b_1$$

Da b_{2p+2} wachsend ist man bekommt

$$b_2 < b_{2p+1}$$

$\Rightarrow$ $(b_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ und $(b_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$

Satz der Monotonkonvergenz konvergieren

$$\lim_{p\to\infty} b_{2p+2} - b_{2p+1} = \lim_{p\to\infty} -\frac{1}{2p+2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{p\to\infty} b_{2p+2} = \lim_{p\to\infty} b_{2p+1}$$

b_n ist beschränkt und besitzt genau einen HP $\Rightarrow$

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und ist dann eine Cauchy Folge

III.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

III.6.1 Definition Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $a_n \in \mathbb{R}^d$ und sei $a \in \mathbb{R}^d$

Man sagt dass a_n gegen a konvergiert falls

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n - a\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (a_n^i - a^i)^2} = 0$$

III.6.2 Satz Es sind äquivalent

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

ii) $\forall i = 1 \dots d \quad \lim_{n\to\infty} a_n^i = a^i$

Beweis von dem Satz III.6.2

$$\forall i=1\dots d \ \lim_{n\to\infty} a_n^i = a^i$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i=1\dots d \quad \lim_{n\to\infty} (a_n^i - a^i)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (a_n^i - a^i)^2} = 0$$

III.6.3 Definition Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $a_n \in \mathbb{R}^d$ heisst beschränkt falls gilt

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \|a_n\| \leq M$$

III.6.4 Bemerkung

a_n beschränkt $\Longleftrightarrow$

$\forall i = 1 \dots d \quad a_n^i$ beschränkt

III.6.5 Satz (Bolzano Weierstrass in $\mathbb{R}^d$)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$ besitzt eine konvergierende Teilfolge

Beweis vom Satz III.6.5

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}^d$, so dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Wir bauen $l_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend so dass

$a^i_{l_1(l_2 \circ \dots \circ l_k(n))}$ konvergiert für alle $i = 1, 2 \dots, k$ auf

Diesen Aufbau wird nach Induktion geführt.

Der Fall $k=1$

$(a^1_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt

BW $\Rightarrow$ $\exists\, l_1(n)$ so dass

$a^1_{l_1(n)}$ konvergiert

(Ak) Seien $l_1, l_2 \dots l_k$ $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ streng Monoton wachsend so dass

$$\left(a^i_{l_1\circ l_2 \cdots \circ l_k(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert}$$

für alle $i=1,2\dots,k$.

$a^{k+1}_{l_1\circ l_2\cdots\circ l_k(n)}$ ist eine beschränkte Folge.

BW $\Rightarrow$ Es existiert l_{k+1} streng monoton wachsend so dass

$$a^{k+1}_{l_1 \circ l_2 \cdots \circ l_k}(l_{k+1}(n)) \text{ konvergiert}$$

Beobachtung für $i = 1 \cdots k$

$$a^{i}_{l_1 \circ l_2 \cdots \circ l_k \circ l_{k+1}(n)} \text{ ist eine}$$

Teilfolge von $\left(a^{i}_{l_1 \circ \cdots \circ l_k(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Da $a^{i}_{l_1 \circ \cdots \circ l_k(n)}$ konvergiert für alle $i = 1 \cdots k$

$a^{i}_{l_1 \circ \cdots \circ l_k \circ l_{k+1}(n)}$ konvergiert weiter.

$\Rightarrow (A_{k+1})$

Damit sind wir mit dem Beweis von BW in $\mathbb{R}^d$ fertig $\square$

III.7 Reihen

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die zugehörige Reihe zu dieser Folge ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

III.7.1 Man sagt dass s_n eine konvergierende Reihe ist falls

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s \quad \text{existiert}$$

III.7.2 Beispiele

i) $$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^n \qquad q \in (0,1)$$

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1-q}$$

ii) $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

Wir haben gesehen im Abschnitt III.5 dass die alternierende harmonische Reihe konvergiert.

III.7.3 Cauchy Kriterium

Die Reihe $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \; ; \; \forall N \leq n < m$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

(das impliziert $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$)

III.7.4 Quotientkriterium.

Sei $a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$

i) Falls

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

so ist die Reihe $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

konvergent

ii) Falls

$$\underline{\lim_{k \to \infty}} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$$

so ist $\sum_{k=1}^{n} a_k$ divergent (d.h. nicht konvergent)

Beweis von dem Quotientkriterium.

Beweis von i)

Falls $\overline{\lim_{k \to \infty}} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$ es existiert

$q \in (0,1)$ und $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\forall\, k \geq N \qquad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q$$

$$\Rightarrow \quad \forall\, k \geq N \quad |a_{k+1}| \leq q^{k-N} |a_N|$$

$$\Rightarrow \quad \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq |a_N| \sum_{k=n}^{m} q^k q^{-N}$$

$\forall\, n \geq N+1$

$m > n$

$$\leq |a_N| q^{n-N} \sum_{j=0}^{\infty} q^j$$

$$= \frac{q^{n-N}}{1-q} |a_N|$$

Da $\lim_{n \to \infty} \frac{q^{n-N}}{1-q} = 0$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$\forall\, n \geq n_0 \qquad \left|\frac{q^{n-N}}{1-q}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall\, m > n > \mathrm{Max}\{n_0, N\} \qquad \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$$

Die Reihe $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist Cauchy

Beweis von ii)

Falls $\lim\limits_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$

$\Rightarrow \exists\, q \in (0,1) \quad \exists\, N \in \mathbb{N}$ s. d

$n \geq N \qquad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq \frac{1}{q}$

$\Rightarrow \quad |a_{k+1}| \geq \frac{1}{q^{k+1-N}} \, |a_N|$

aber $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{q^{k+1-N}} = +\infty$

$\Rightarrow$ a_k konvergiert nicht nach 0

$\Rightarrow$ s_m kann nicht konvergierend sein.

III.7.5 Beispiel

Sei $z \in \mathbb{C}$ und

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

$z \neq 0$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{z}{k+1}$$

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{z}{k+1} \right| = 0$$

$\Rightarrow$ s_n konvergiert für alle z

Der Limes

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = \text{"} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \text{"}$$

wird $\mathrm{Exp}(z)$ notiert

III.7.6 Satz der Wurzelkriterium

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine $\mathbb{C}$-Folge

i) Falls
$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$
dann konvergiert die Reihe
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ii) Falls
$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$
dann konvergiert die Reihe nicht

Beweis vom Satz III.7.6

Beweis von i)

i) $\Rightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists q \in (0,1)$ s.d.

$\forall k \geq N \quad |a_k|^{1/k} < q$

$\Rightarrow \quad |a_k| < q^k$

Sei $\varepsilon > 0$ Da $\sum_{k=0}^{n} q^k$ konvergiert

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0$

$$\left| \sum_{k=n}^{m} q^k \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad \forall n, m \geq n_0 \quad \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ s_n ist Cauchy

Beweis von ii)

Falls $\limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$

$\exists q \in (0,1)$ so dass $\forall N \in \mathbb{N} \ \exists l \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[\ell]{|a_\ell|} > \frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow \quad |a_\ell| > \frac{1}{q^\ell}$$

$\Rightarrow$ a_n konvergiert nach 0 nicht.

III.7.7 Die Potenzreihen

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \qquad c_k \in \mathbb{C}$$

$$\sqrt[k]{|c_k z^k|} = |z| \sqrt[k]{|c_k|}$$

$$\limsup_{k \to \infty} |z| \sqrt[k]{|c_k|} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad |z| < \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \rho$$

$\rho \in [0, \infty]$

Quotientkriterium $\Rightarrow$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{n} c_k z^k$

konvergiert falls $|z| < \rho$

konvergiert nicht falls $|z| > \rho$

ρ heisst der Konvergenzradius der Potenzreihe

Beispiel

i) $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$

Wir haben mit der Hilfe von dem Quotient-kriterium bewiesen dass $\forall z \in \mathbb{C}$ $P_N(z)$ konvergiert $\Rightarrow$ $\rho = +\infty$

ii) $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k}$

$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho = 1$

für $|z| = \rho$ es kann entweder konvergieren oder nicht konvergieren

z.B.

$$P_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{konvergiert nicht}$$

$$P_n(-1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \quad \text{konvergiert}$$

III.8 Absolute Konvergenz einer Reihe

III.8.1 Definition

Die Reihe $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert absolut falls $r_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ konvergiert