für $|z| = \rho$ es kann entweder konvergieren oder nicht konvergieren

z.B.

$$P_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{konvergiert nicht}$$

$$P_n(-1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \quad \text{konvergiert}$$

III.8 Absolute Konvergenz einer Reihe

III.8.1 Definition

Die Reihe $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert absolut falls $r_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ konvergiert

III.8.2 Satz

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ absolut konvergiert $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert. ⚠ Die Rezipok gilt nicht: $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

IV STETIGKEIT AUF $\mathbb{R}$

IV.1 Grenzwerte von Funktionen

IV.1.1 Definition

Ein Intervall von $\mathbb{R}$ ist eine Untermenge von $\mathbb{R}$ von der Form

$$I = \begin{cases} [a,b] = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\} \\ (a,b) = \{x \in \mathbb{R} ; a < x < b\} \\ (a,b] = \{x \in \mathbb{R} ; a < x \leq b\} \\ [a,b) = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x < b\} \\ [a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x < +\infty\} \\ (a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} ; a < x < +\infty\} \\ (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} ; -\infty < x \leq a\} \\ (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} ; -\infty < x < a\} \end{cases}$$

und $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

d.h $\forall \; x < y \quad x, y \in I$

$$[x, y] \subset I$$

Man sagt dass I Wegzusammenhängend ist.

IV.1.2 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall von $\mathbb{R}$

und sei $f: I \to \mathbb{R}^n$.

Sei $x_0 \in I$. f hat an der Stelle x_0

einen Grenzwert a falls für jede

Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $x_k \in I$ und

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$$

es gilt

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = a$$

In dem Fall muss $a = f(x_0)$

(Man nimmt $x_k \equiv x_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$).

Man sagt dass f an der Stelle x_0 stetig

ist und man schreibt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

IV 1.3 Beispiele und Gegenbeispiele

i) $I = \mathbb{R}$ und $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$

$a_j \in \mathbb{R}$ $\quad$ f ist ein Polynom

Behauptung: f ist stetig an jeder Stelle

Beweis der Behauptung:

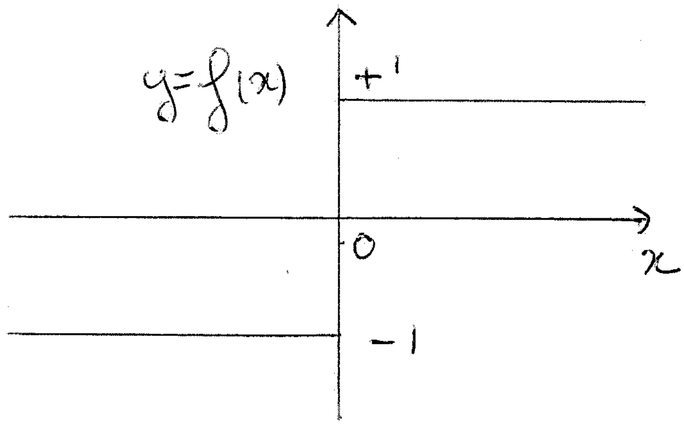
$x_k \to x_0 \quad \Rightarrow \quad x_k^j \to x_0^j$ (Konvergenz Kriterium III.3.3)

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j x_k^j = \sum_{j=0}^{n} a_j x_0^j$$

$$= f(x_0)$$

ii) Sei $f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



Sei $x_k = \frac{1}{k}$ $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = +1$

Sei $y_k = -\frac{1}{k}$ $\lim_{k \to \infty} f(y_k) = -1$

IV.1.4 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}^n$

f hat an der Stelle x_0 einen linksseitigen (b.z.w rechtsseitigen) grenzwert A_- (bzw A_+) falls für alle

$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $x_k \in I$, $x_k < x_0$ und

$\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$ (Man schreibt manchmal $x_k \to x_0^-$)

(bzw $x_k > x_0$) dann gilt

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = A_- \quad \left(\text{bzw } \lim_{k \to \infty} f(x_k) = A_+\right)$$

Man schreibt

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A_-$$

$$\left(\text{bzw} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A_+ \right)$$

IV.1.5 Satz

Eine $\mathbb{R}$-wertige monotone wachsende (bzw fallende) Funktion auf der Strecke $[a,b]$ $(a<b)$ hat an jeder Stelle $x_0 \in [a,b]$ einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert und es gilt

$$A_- = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A_+$$

Beweis des Satzes

Beweis des Satzes

Sei $x_0 \in [a,b]$ und $f \uparrow$ (wachsend)

Es gilt $f(a) \leq f(x_0) \leq f(b)$

Sei $x_k \longrightarrow x_0^-$ (d.h $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ und $x_k < x_0$)

Es gilt auch

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f(a) \leq f(x_k) \leq f(b)$$

Das impliziert dass die Folge $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Sei $A_- := \limsup_{k\to\infty} f(x_k)$

Behauptung 1: $A_- = \sup\{f(x), x < x_0\}$

Beweis der Behauptung 1

Es ist klar dass

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad f(x_k) \leq \sup\{f(x) \; ; \; x < x_0\}$$

Das impliziert

$$A_- = \limsup_{k\to\infty} f(x_k) \leq \sup\{f(x) \; ; \; x < x_0\}$$

Umgekehrt. Sei $l \; \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Teilfolge so dass $\lim_{k\to\infty} f(x_{l(k)}) = A_-$

und sei $x < x_0$.

$$\exists N \quad \text{s.d.} \quad \forall k \geq N \qquad x_{l(k)} > x$$

Aber f ist monoton wachsend. Das ergibt

$$\forall k \geq N \qquad f(x) \leq f(x_{l(k)})$$

$\Rightarrow \qquad f(x) \leq A_-$. Das gilt für alle $x < x_0$

$\Rightarrow \quad \sup\{f(x) \; ; \; x < x_0\} \leq A_- \Rightarrow$ Behauptung 1

Behauptung 2 : $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = A_-$

Es genügt zu beweisen

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \geq A_-$$

Sei l' eine Teilfolge mit

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{l'(k)}) = \liminf_{k\to\infty} f(x_k)$$

Da $\lim\limits_{k\to\infty} x_{l'(k)} = x_0$, wie vorher,

$\forall\ x < x_0 \qquad \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{l'(k)}) \geq f(x)$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_{l'(k)}) \geq \underbrace{\sup\{f(x)\,;\, x<x_0\}}_{= A_-}$$

$\Rightarrow$ Behauptung 2 . Wir haben dann

$$\limsup_{k\to\infty} f(x_k) = \liminf_{k\to\infty} f(x_k)$$

$\Rightarrow$ Die Folge $f(x_k)$ konvergiert.

Das gilt für alle Auswahl von Folgen $x_k \to x_0^-$. Davon bekommt man dass f einen linksseitigen Grenzwert an der Stelle x_0 besitzt. $\square$

IV.2 Stetige Funktionen

IV.2.1 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. f heisst auf I stetig falls f in jedem Punkt $x_0 \in I$ stetig ist.

Die Menge von stetigen $\mathbb{R}^n$ Abbildungen auf I wird $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ notiert.

IV.2.2 Satz Seien $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ beide stetig so ist die Verknüpfung $g \circ f$ auch stetig

Beweis. Das ist eine direkte Folgerung aus der Definition.

$$x_k \to x_0 \Rightarrow f(x_k) \to f(x_0) \Rightarrow g(f(x_k)) \downarrow g(f(x_0))$$

IV.2.3 Satz

$$f \in C^0(I, \mathbb{R}^n) \quad , \quad g \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$$

dann $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f + \beta g \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$

Man sagt dass $(\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n), +, \cdot)$ einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet (Lineare Algebra)

IV.2.4 Satz (Weierstrass'sches Kriterium für Stetigkeit)

Sei $f: I \to \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in I$

f ist an der Stelle x_0 stetig genau dann wenn

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ mit $\forall x \in I$

(*) $$|x - x_0| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Beweis von dem Satz IV.2.4

Hyp: f ist an der Stelle x_0 stetig

Frage: gilt die Aussage (*) ?

Indirekt. Die Negation von (*) lautet

$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in I$ mit

$$|x_\delta - x_0| < \delta \quad \text{aber} \quad \|f(x_\delta) - f(x_0)\| > \varepsilon_0$$

Sei $\delta_k = \frac{1}{k}$ $\quad \lim_{k \to \infty} x_{\delta_k} = x_0$

aber $\qquad \| f(x_{\delta_k}) - f(x_0) \| > \varepsilon_0$

Beweis der Reziprok

Hypothese: $(*)$ gilt

Frage: ist f an der Stelle x_0 stetig?

Sei $x_k \to x_0$ und sei $\varepsilon > 0$

Sei $\delta > 0$ so dass

$$|x - x_0| < \delta \implies \| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon$$

$\exists\, N$ so dass $\forall\, k \geq N \quad |x_k - x_0| < \delta$

Dann für alle $\varepsilon > 0$ wir haben eine N gefunden mit

$$\forall\, k \geq N \quad \| f(x_k) - f(x_0) \| < \varepsilon$$

IV.2.5 Gegenbeispiel und Beispiele von stetigen Funktionen

i) Sei f die charakteristische Funktion von den rationnellen Zahlen. D. h.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Behauptung: f ist nirgendwo stetig

Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ wir beweisen dass

$$\forall \delta > 0 \qquad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

Indirekt: Nehmen wir an dass

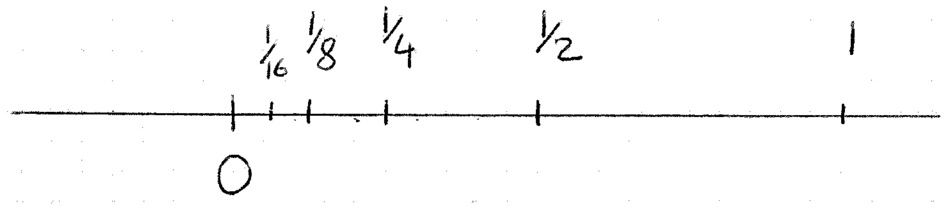
$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$$

Sei $A := \{ x \in \mathbb{Q} \; ; \; x < x_0 \}$

Nach der Voraussetzung gilt

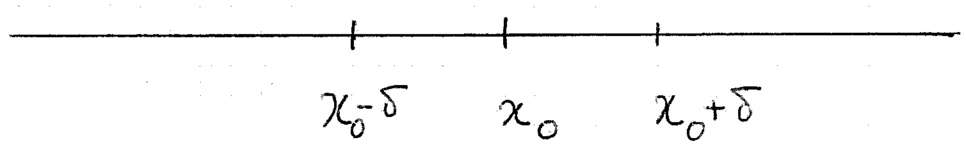
$$\sup A \leq x_0 - \delta$$

Wir nehmen $\delta \in (0,1)$



Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^{k+1}} \leq \delta < \frac{1}{2^k}$

Sei $r \in A$ mit $|\sup A - r| < \frac{\delta}{4} < \frac{1}{2^{k+2}}$



$$\sup A < \underbrace{r + \frac{1}{2^{k+2}}}_{\in \mathbb{Q}} \leq \sup A + \frac{\delta}{4} + \frac{1}{2^{k+2}} \leq \sup A + \delta \leq x_0$$

Wiederspruch!

Dann $\forall \delta > 0 \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\quad \forall \delta > 0 \quad \exists\, r \in (-\delta + x_0, x_0 + \delta)$

$$\| f(r) - f(x_0) \| = 1 > \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ f ist an der Stelle x_0 nicht stetig.

In einer ähnlichen Weise man beweist dass f an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{Q}$ nicht stetig ist.

ii) Sei $f(x) = \sqrt{|x|}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

f ist überall stetig.

Wir beweisen es zuerst an der Stelle $x_0 \neq 0$. Wir nehmen $x_0 > 0$. $\forall x > 0$ gilt

$$\left| \sqrt{x} - \sqrt{x_0} \right| \leqslant \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leqslant \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$$

für $|x - x_0| < \underbrace{\sqrt{x_0}\,\varepsilon}_{=\delta}$ gilt $\quad \left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| < \varepsilon$

An der Stelle $x_0 = 0$ es gilt

$$|x - 0| = |x| < \varepsilon^2 = \delta$$

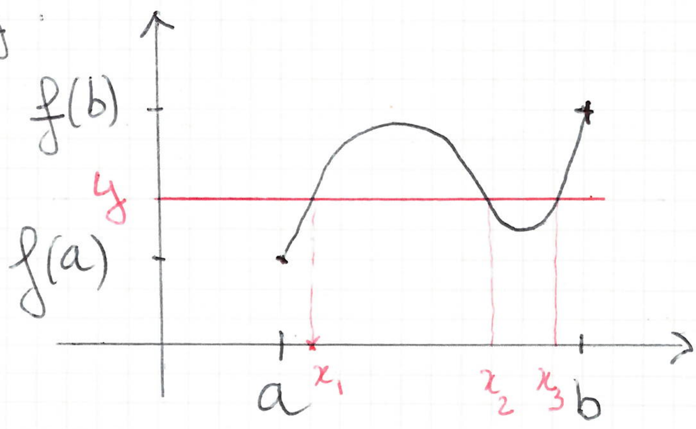
$$\Rightarrow \quad \left| \sqrt{|x|} - \sqrt{0} \right| = \sqrt{|x|} < \varepsilon$$

IV.3 Der Zwischenwertsatz und Folgerungen

IV.3.1 Satz (Zwischenwertsatz)

Seien $-\infty < a < b < +\infty$ und sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq f(b)$. Dann $\forall y \in [f(a), f(b)]$ es existiert (mindestens) ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Geometrische Illustration



$f(x_i) = y$