An der Stelle $x_0 = 0$ es gilt

$$|x-0| = |x| < \varepsilon^2 = \delta$$

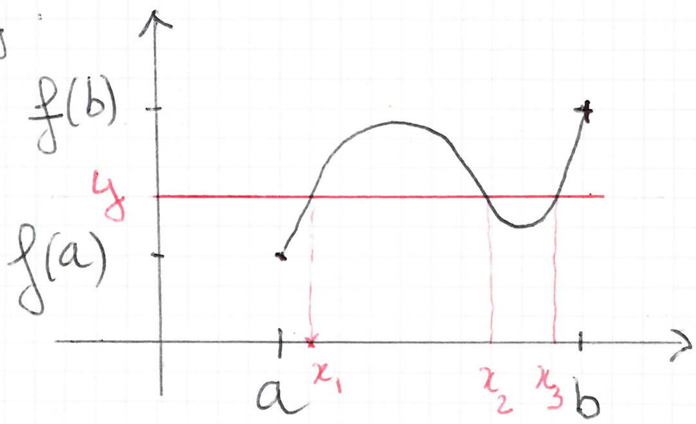
$$\Rightarrow \quad \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{0}\right| = \sqrt{|x|} < \varepsilon$$

IV.3 Der Zwischenwertsatz und Folgerungen

IV.3.1 Satz (Zwischenwertsatz)

Seien $-\infty < a < b < +\infty$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq f(b)$. Dann $\forall y \in [f(a), f(b)]$ es existiert (mindestens) ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.

Geometrische Illustration



$f(x_i) = y$

Folgerung: Das Bild von einem Intervall durch eine stetige Funktion ist ein Intervall

Beweis des Zwischenwertsatz

Das "Bisektionsverfahren"

Wir bauen in einer induktiven Weise zwei Folgen

$$a \leq a_1 \leq a_2 \quad \dots \quad b_2 \leq b_1 \leq b$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend

so dass

i) $$|a_n - b_n| \leq 2^{-n+1} |a-b|$$

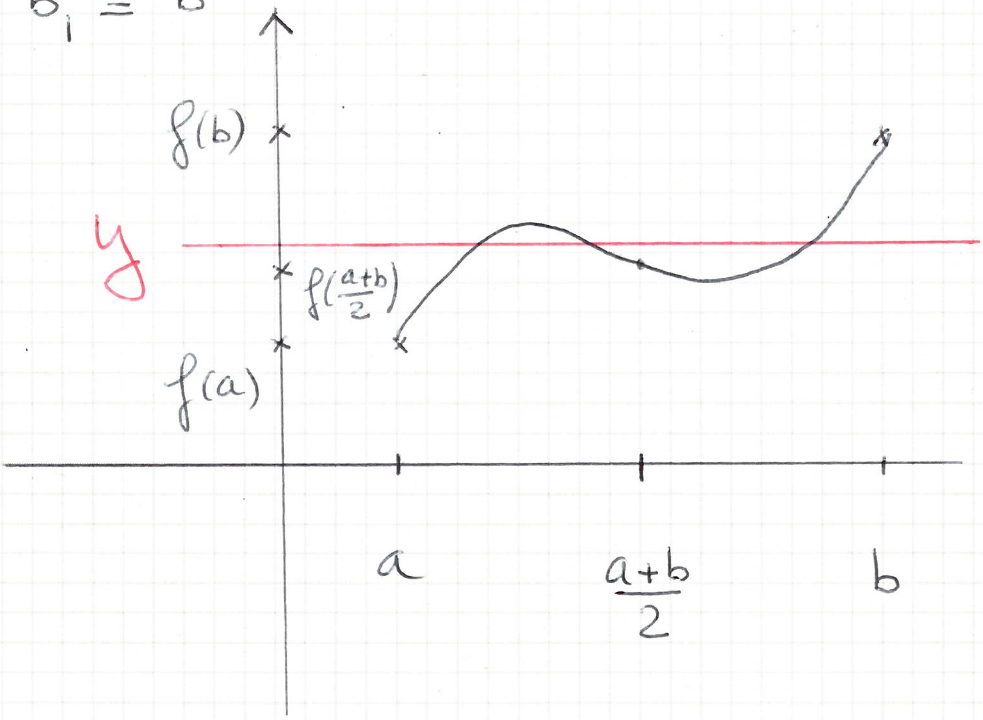
ii) $$y \in [f(a_n), f(b_n)]$$

(oder $[f(b_n), f(a_n)]$ falls $f(b_n) \leq f(a_n)$)

Wir nehmen zuerst

$a_1 = a$

$b_1 = b$



Wie werden a_2 und b_2 ausgewählt?

$\frac{a+b}{2}$ ist die Mitte der Strecke $[a,b]$

Wir nehmen

$a_2 = \frac{a+b}{2}$

$b_2 = b$

falls y zwischen $f(\frac{a+b}{2})$ und $f(b)$ sich befindet sonst nehmen wir

$$\begin{cases} a_2 = a \\ b_2 = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Nehmen wir an dass $(a_k)_{k \leq n}$ schon ausgewählt wurden so dass i) und ii) $\forall k \leq n$ gilt und

wir nehmen

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

falls y sich zwischen $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$ und $f(b_n)$ sich befindet sonst nehmen wir

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$$

Da a_n wachsend und beschränkt ist konvergiert diese Folge

b_n auch konvergiert (aus dem selben Grund) und $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$

Sei $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

Da f stetig ist

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

aber y sich zwischen $f(a_n)$ und $f(b_n)$ befindet $\Longrightarrow$

$$\boxed{y = f(\alpha)}$$

IV.3.2 Anwendung

Sei $a_0, a_1 \dots a_{2P} \in \mathbb{R}$

und sei

$$P(x) = x^{2P+1} + a_{2P} x^{2P} + \dots + a_1 x + a_0$$

(P ist ein $\mathbb{R}$-Polynom vom Grad $2P+1$)

Behauptung: P besitzt eine reelle Nullstelle. D.h.

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ mit } P(x_0) = 0$$

Beweis der Behauptung.

Man schreibt

$$P(x) = x^{2P+1} \left(1 + \sum_{k=0}^{2P} \frac{a_k}{x^{2P+1-k}} \right)$$

Es gilt $\forall k = 0, 1, 2, \ldots, 2p$

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{a_k}{|x|^{2p+1-k}} = 0$$

Das impliziert

$$\lim_{|x| \to \infty} 1 + \sum_{k=0}^{2p} \frac{a_k}{x^{2p+1-k}} = 1$$

Dann $\exists M \in \mathbb{R}_+$ mit $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|x| \geq M \implies 1 + \sum_{k=0}^{2p} \frac{a_k}{x^{2p+1-k}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\implies \begin{cases} x \geq M & P(x) \geq \frac{x^{2p+1}}{2} \\ x \leq -M & P(x) \leq \frac{x^{2p+1}}{2} \end{cases}$$

Also $P(M) > 0$ und $P(-M) < 0$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ $\exists\, x_0 \in [-M; +M]$

mit $p(x_0) = 0 \in [p(-M); p(M)]$

IV.3.3 Satz Seien $-\infty < a < b < +\infty$

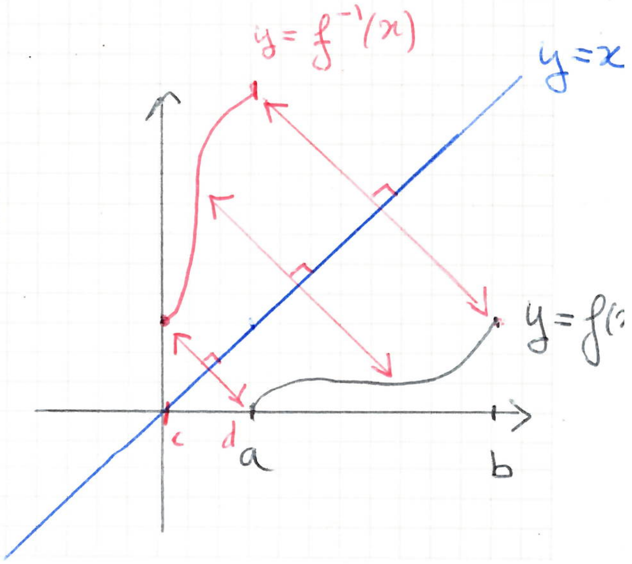
Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und <u>streng</u> monoton wachsend.

Setze $f(a) = c$ und $f(b) = d$

Dann ist $f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ bijektiv

und $f^{-1} : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ ist auch stetig und streng monoton wachsend.

Man bekommt den graph von f^{-1} durch die Anwendung der Symmetrie bez. $y = x$ des Graphs von f



Beweis vom Satz IV.3.3

f bijektiv $\Leftrightarrow$ f injektiv und f surjektiv

f ist streng monoton wachsend $\Rightarrow$

$$\left(x > x' \Rightarrow f(x) > f(x') \right)$$

Dann $x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$

d.h. f ist injektiv

Sei $y \in [f(a) = c \,;\, f(b) = d]$

ZWS $\Rightarrow$ $\exists\, x \in [a, b]$ mit

"Zwischenwertsatz" $f(x) = y$

das impliziert dass f surjektiv ist.

Dann haben wir bewiesen dass f bijektiv ist.

ETH zürich

IV.25

Behauptung: f^{-1} ist stetig.

Beweis der Behauptung.

Sei $y_0 \in [c,d]$ und $y_k \in [c,d]$

mit $\lim_{k \to \infty} y_k = y_0$

Frage: $\lim_{k \to \infty} f^{-1}(y_k) = f^{-1}(y_0)$?

Sei $x_k = f^{-1}(y_k)$ und $x_0 = f^{-1}(y_0)$

Da x_k beschränkt ist $\exists\ \ell\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Teilfolge mit

$$\lim_{k \to \infty} x_{\ell(k)} = \bar{x} \quad \text{wobei } \bar{x} \in [a,b]$$

Da f stetig ist est gilt

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{\ell(k)}) = f(\bar{x})$$

d.h. $\lim_{k\to\infty} y_{\ell(k)} = f(\bar{x})$

aber $\lim_{k\to\infty} y_{\ell(k)} = y_0$

$\Rightarrow \quad f(\bar{x}) = y_0 = f(x_0)$

Da f injektiv ist man bekommt $x_0 = \bar{x}$

Dann der einzige mögliche HP von den beschränkten Folge x_k ist x_0

$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$

$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} f^{-1}(y_k) = f^{-1}(y_0)$

$\Rightarrow$ die Behauptung.

Zum Schluss wir beweisen dass f^{-1}

streng monoton wachsend ist.

Sei $y > y'$ und $\begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ x' = f^{-1}(y') \end{cases}$

Falls $x' \geq x$ wäre hätten wir

$$\underbrace{f(x')}_{= y'} \geq \underbrace{f(x)}_{= y} \quad \text{Wiederspruch!}$$

Dann gilt $\quad x' = f^{-1}(y') < x = f^{-1}(y)$

$\square$

IV.3.4 Satz $\quad a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
$b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$

stetig und streng monoton wachsend

Seien $\quad c := \inf \{ f(x) \; ; x \in (a,b) \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
$d := \sup \{ f(x) \; ; x \in (a,b) \} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Dann ist $f : (a,b) \longrightarrow (c,d)$ bijektiv und $f^{-1} : (c,d) \longrightarrow (a,b)$ ist stetig und streng monoton wachsend

IV.3.5 Beispiele

i) $$f \quad \begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^n \end{aligned} \qquad n \in \mathbb{N}$$

f ist streng monoton wachsend.

Grund $$x^n - (x')^n = (x - x')\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k (x')^{n-1-k}\right)}_{>0}$$

$$\Rightarrow \left(x > x' \Rightarrow x^n > (x')^n\right)$$

Die Inverse Funktion wir

$$f^{-1} \quad \begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ y &\longmapsto y^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$ notiert

die Funkion $y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$ (Wurzel n)

Wird auch $\sqrt[n]{y}$ notiert.

Dankt dem vorherigen Satz wir wissen dass sie stetig ist.

ii) Sei $\operatorname{Exp}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Exp ist streng monoton wachsend:

$$a > b \Rightarrow a^k > b^k$$ (wir haben es gerade gesehen)

$\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} > \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!}$$

und

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} > a - b > 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Exp} a = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \geqslant \operatorname{Exp} b + a - b$$

$$> \operatorname{Exp} b$$

$\forall\, a > b > 0$ es gilt

$$\mathrm{Exp}(-a)\,\mathrm{Exp}(a) = 1 = \mathrm{Exp}(-b)\,\mathrm{Exp}(b)$$

(Serie 6 Übung 6.4 b)

$$\mathrm{Exp}(a) > \mathrm{Exp}(b) \implies \mathrm{Exp}(-a) < \mathrm{Exp}(-b)$$

und

$$a > b > 0 \iff -a < -b < 0$$

Also Exp ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$

Behauptung: Exp ist überall stetig.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und sei $A > |x_0|$

für x sodass $|x - x_0| < A - |x_0|$

Man hat $|x| \leq |x - x_0| + |x_0| < A$

und

$$|\mathrm{Exp}\, x - \mathrm{Exp}\, x_0| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \frac{x_0^k}{k!} \right| .$$

$$= \left| \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(x^k - x_0^k)}{k!} \right|$$

$$\leq \limsup_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{|x - x_0|}{k!} \left| \sum_{l=0}^{k-1} x^l x_0^{k-1-l} \right|$$

$$\leq \limsup_{n \to \infty} |x - x_0| \sum_{k=1}^{n} \frac{|A|^{k-1} (k-1)}{k!}$$

$$\leq |x - x_0| \exp A$$

Sei $\varepsilon > 0$ $\quad |x - x_0| < \overbrace{\mathrm{Min}\{ A - |x_0| ; (\exp A)^{-1} \varepsilon \}}^{\delta \, =}$

es gilt $|\mathrm{Exp}\, x - \mathrm{Exp}\, x_0| < \varepsilon$

Für $x \geq 0$ es gilt $\operatorname{Exp}(x) > x+1 \geq 1$

$\Rightarrow \sup \{ \operatorname{Exp}(x) \; ; \; x > 0 \} = +\infty$

$x < 0 \qquad \operatorname{Exp}(x) = \dfrac{1}{\operatorname{Exp}(-x)}$

$\Rightarrow \inf \{ \operatorname{Exp}(x) \; ; \; x < 0 \}$

$= \inf \left\{ \dfrac{1}{\operatorname{Exp} x} \; ; \; x > 0 \right\} = 0$

$\cancel{=} \quad \dfrac{1}{}$

Dann Exp bildet eine bijektion von

$\mathbb{R}$ nach $(0, +\infty)$

Ihre Inverse $\operatorname{Exp}^{-1}(y)$ wird

$\operatorname{Log} y$ notiert

Satz IV.3.4 $\Rightarrow$ Log ist stetig, monoton wachsend von $(0, \infty)$ nach $\mathbb{R}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\quad \mathrm{Exp}(a+b) = \mathrm{Exp}(a)\,\mathrm{Exp}(b)$

(Additionstheorem für Exp)

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Log}\,\mathrm{Exp}(a+b) = \mathrm{Log}\big(\mathrm{Exp}(a)\,\mathrm{Exp}(b)\big)$$

$$\begin{array}{c} \| \\ a+b \end{array} = \mathrm{Log}\,\mathrm{Exp}\,a + \mathrm{Log}\,\mathrm{Exp}\,b$$

IV.3.6 Additionstheorem für den Logarithmus

$\forall \alpha, \beta \in (0,\infty)$ es gilt

$$\mathrm{Log}(\alpha\beta) = \mathrm{Log}\,\alpha + \mathrm{Log}\,\beta$$

Serie 7 Übung 7.2 b) $\Rightarrow \exists\, e \in \mathbb{R}$

(die eulersche Zahl) mit

$\forall r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \qquad \mathrm{Exp}\,\frac{p}{q} = e^{\left(\frac{p}{q}\right)}$

IV.4 Die gleichmässige Stetigkeit

Definition IV.4.1 Sei I ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}^n$. f heisst auf I gleichmässig stetig falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in I$$

$$|x-y| < \delta \implies \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$$

IV.4.2 Bemerkung: f gleichmässig stetig $\implies$ f stetig auf I

Das gilt nicht umgekehrt

$$f \quad (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$ ist nicht gleichmässig stetig

$$\left| f\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k+1}\right) \right| = 1$$

IV.4.3 Satz Seien $-\infty < a < b < +\infty$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist f gleichmässig stetig

So ein Intervall von der Forme $I = [a,b]$ heisst "kompakt Intervall"

Beweis von dem Satz IV.4.3

Indirekt. Wir nehamen an dass $\exists\ \varepsilon_0 > 0$, $\forall \delta > 0$ $\exists\ x, y \in [a,b]$

mit $|x-y| < \delta$ aber $\| f(x) - f(y) \| > \varepsilon_0$

Also für $\delta = \frac{1}{k}$ $\exists\ x_k, y_k \in [a,b]$

mit $|x_k - y_k| < \frac{1}{k}$ aber $\| f(x_k) - f(y_k) \| > \varepsilon_0$

x_k ist beschränkt. Dann, es existiert $x_{\ell(k)}$ mit $\lim\limits_{k \to \infty} x_{\ell(k)} = x_0 \in [a,b]$

f ist an der Stelle x_0 stetig $\Rightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{\ell(k)}) = f(x_0)$$

Da $|x_{\ell(k)} - y_{\ell(k)}| < \frac{1}{\ell(k)}$

$$\lim_{k\to\infty} y_{\ell(k)} = x_0 \quad \text{und}$$

$$\lim_{k\to\infty} f(y_{\ell(k)}) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \| f(x_{\ell(k)}) - f(y_{\ell(k)}) \| = 0$$

Wiederspruch!

$\square$

IV.5 Minimum und Maximum einer stetigen Funktion auf einem kompakten Intervall

IV.5.1 Satz Seien $-\infty < a < b < +\infty$ und $f \in C^0([a,b];\mathbb{R})$

Dann $\exists\ c, d \in [a,b]$ mit

$$f(c) = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

und

$$f(d) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

Man schreibt

$$\begin{cases} f(c) = \operatorname{Min}_{x \in [a,b]} f(x) \\ f(d) = \operatorname{Max}_{x \in [a,b]} f(x) \end{cases}$$

Beweis vom Satz IV.5.1

Sei $x_k \in [a,b]$ mit $f(x_k) \longrightarrow \inf\{f(x);\, x \in [a,b]\}$

$\exists\ x_{\ell(k)} \longrightarrow x_0$ dann $\lim_{k \to \infty} f(x_{\ell(k)}) = f(x_0)$

$= \inf\{f(x);\, x \in [a,b]\}$ $\square$