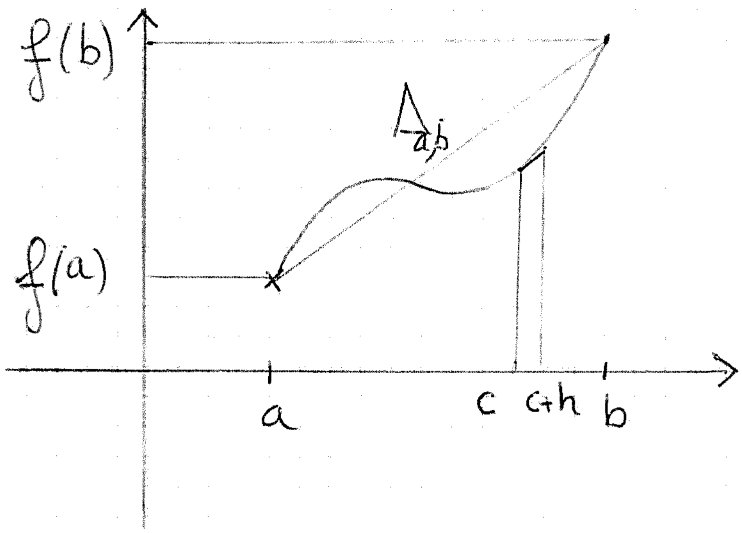
V DIFFERENTIALRECHNUNG AUF $\mathbb{R}$

V.1 Differential und Differentiationsregeln

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$



Die Steigung zwischen a und b ist der Differenzquotient

$$\Delta_{a,b} := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Die Infinitesimalsteigung an der Stelle $c \in (a,b)$ ist der Limes (wenn es existiert)

$$\lim_{h \to 0} \Delta_{c,c+h} := \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

V.1.1 Definition Ein offenes Intervall von $\mathbb{R}$ ist ein Intervall I von der Form

$$I = \begin{cases} (a, b) & -\infty < a < b < +\infty \\ (a, +\infty) & \\ \text{oder } (-\infty, a) & (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \end{cases}$$

V.1.2 Definition Sei I ein offenes Intervall. Sei $f : I \to \mathbb{R}$.

f heisst an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Diesen Limes wird $f'(x_0)$ oder auch $\frac{df}{dx}(x_0)$ notiert und heisst die Ableitung (das Differential) von

f an der Stelle x_0

d.h. $\forall\, x_k \to x_0$ $\quad x_k \in I$ $\quad$ es
$ x_k \neq x_0$

gilt
$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} = f'(x_0)$$

oder $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in I$

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

ii) Analog. Sei $f : I \to \mathbb{R}^n$. $f = (f_1 \dots f_n)$

f heisst an der Stelle x_0 Differenzierbar falls jede der Komponentfunktionen f_i an der Stelle x_0 differenzierbar ist

und man schreibt

$$f'(x_0) = \left(f_1'(x_0), \dots, f_n'(x_0) \right)$$

iii) f heisst auf I differenzierbar falls f an jeder Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar ist

V.1.2 Beispiel und Gegenbeispiel

i) $I = \mathbb{R}$ und $f(x) = mx + b$.

$m \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{mx + b - (mx_0 + b)}{x - x_0} = m$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$$

In diesem Beispiel stimmen die globale Steigung mit der Infinitesimalen Steigung an jeder Stelle überein.

ii) $f(x) = x^k \qquad I = \mathbb{R}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^k - x_0^k}{x - x_0} = \sum_{l=0}^{k-1} x^l x_0^{k-1-l}$$

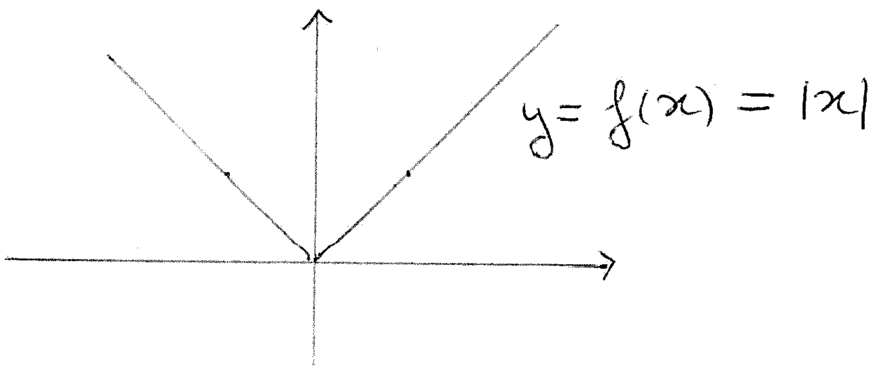
und $$\lim_{x \to x_0} \sum_{l=0}^{k-1} x^l x_0^{k-1-l} \qquad \text{(Polynom)}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} x_0^l x_0^{k-1-l} = k x_0^{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x_0) = k\, x_0^{k-1}$$

iii) $f(x) = |x| \qquad I = \mathbb{R}$

f ist an der Stelle 0 <u>nicht</u> differenzierbar



$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$$\frac{f\left(\frac{(-1)^k}{k}\right)-f(0)}{\frac{(-1)^k}{k}-0} = (-1)^k$$ konvergiert nicht!

iv) $$\mathrm{Exp}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\frac{\mathrm{Exp}(x)-\mathrm{Exp}(x_0)}{x-x_0} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k - x_0^k}{k!\,(x-x_0)}$$

Wir studieren die Existenz von

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k-x_0^k}{k!\,(x-x_0)}$$

Zwei sukzessive Konvergenz Prozesse

Wir wissen schon dass

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k - x_0^k}{k!(x-x_0)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!} x_0^{k-1}$$

$j = k-1$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_0^j}{j}$$

$= \mathrm{Exp}(x_0)$ existiert

Dürfen wir $\lim\limits_{n\to\infty}$ und $\lim\limits_{x\to x_0}$ austauschen?

Im allgemein nein!

Beispiel $\qquad x \in (0,1)$

$$\lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-x)^k$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \lim_{n \to \infty} \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \lim_{n \to \infty} \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

Aber

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{k=0}^{n} (-x)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

und $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ konvergiert nicht da $a_k := (-1)^k \not\to 0$

Also man darf die 2 Konvergenz Prozesse in diesem Beispiel <u>nicht</u> austauschen.

Zurück zu der Differenzierbarkeit von

Exp(x).

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und sei $|x_0| < A$

Wir beschränken uns auf die

$x \in \mathbb{R}$ so dass $|x - x_0| < A - |x_0|$

$\left(\Rightarrow \quad |x| \leq |x - x_0| + |x_0| < A \right)$

Wir studieren die Differenz

$$\left| \frac{\operatorname{Exp}(x) - \operatorname{Exp}(x_0)}{x - x_0} - \operatorname{Exp}(x_0) \right|$$

$$= \left| \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x^k - x_0^k}{k!\,(x - x_0)} - \frac{x_0^{k-1}}{(k-1)!} \right) \right|$$

$$= \left| \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[\sum_{\ell=0}^{k-1} x^{\ell} x_0^{k-1-\ell} - k x_0^{k-1} \right] \right|$$

Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert N

so dass

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=N}^{n} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{A^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\left| \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[\sum_{\ell=0}^{k-1} \left(x^{\ell} x_0^{k-1-\ell} \right) - k x_0^{k-1} \right] \right|$$

$$\overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \left| \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \left[\sum_{\ell=0}^{k-1} \left(x^{\ell} x_0^{k-1-\ell} \right) - k x_0^{k-1} \right] \right|$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k A^{k-1}}{k!} + \frac{A^{k-1}}{k-1!}$$

$\exists \delta > 0$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \left[\sum_{l=0}^{k-1} x^l x_0^{k-1-l} - k x_0^{k-1} \right] \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}$$

Dann für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x - x_0| < \operatorname{Min}\{\delta, A - |x_0|\}$$

es gilt

$$\left| \frac{\operatorname{Exp}(x) - \operatorname{Exp}(x_0)}{x - x_0} - \operatorname{Exp}(x_0) \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Exp ist an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\operatorname{Exp}' x_0 = \operatorname{Exp} x_0$$

V) Sei $\operatorname{Exp}(ix) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!}$

Es gilt: $\operatorname{Exp}(ix)$ ist an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und

$$\frac{d}{dx}\Big(\operatorname{Exp}(ix)\Big) = i\,\operatorname{Exp}(ix)$$

(Übung)

Seien $\cos x = \dfrac{\operatorname{Exp}(ix) + \operatorname{Exp}(-ix)}{2}$

$\sin x = \dfrac{\operatorname{Exp}(ix) - \operatorname{Exp}(-ix)}{2i}$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

V.1.3 Bemerkung

f an der Stelle x_0 differenzierbar

$\Rightarrow$ f an der Stelle x_0 stetig

aber die umgekehrte Implikation gilt nicht

Beweis der Bemerkung

Sei $x_k \in I$ $\quad x_k \longrightarrow x_0$

Da f differenzierbar ist es gilt

$$\lim_{k \to \infty} \left[\frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} - f'(x_0) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} (x_k - x_0) \left[\frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} - f'(x_0) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(x_k) - f(x_0) - (x_k - x_0) f'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(x_0)$$

Es geht nicht umgekehrt:

$f(x) = |x|$ ist an der Stelle 0 stetig aber nicht differenzierbar.

V.1.4 Eigenschaften des Differentials

Seien $f, g \; I \to \mathbb{C}$ an der Stelle x_0 differenzierbar dann ist

i) $f+g$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

ii) fg an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Falls $g(x_0) \neq 0$ $\frac{f}{g}$ ist an der Stelle x_0 auch differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Beweis $\longrightarrow$ Skript.

V.1.5 Satz (Kettenregel)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar und sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(f(x_0))$$

Beweis vom Satz V.1.5 in dem Fall

$f'(x_0) \neq 0$

Sei $x_k \to x_0$ und $x_k \neq x_0$

für k gross genug $f(x_k) \neq f(x_0)$

$$\frac{g\circ f(x_k) - g\circ f(x_0)}{x_k - x_0} = \frac{g(f(x_k)) - g(f(x_0))}{f(x_k) - f(x_0)} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$$

$$x_k \to x_0 \implies y_k = f(x_k) \longrightarrow y_0 = f(x_0)$$

(f diff an der Stelle x_0

$\Rightarrow$ f an der Stelle x_0 stetig)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(y_k) - g(y_0)}{y_k - y_0} = g'(y_0) = g'(f(x_0))$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} = f'(x_0)$$

$\square$

V.1.6 Beispiel

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{Exp}(x^2+x)\right) = (2x+1)\operatorname{Exp}(x^2+x)$$

V.2 Der Mittelwertsatz und Folgerungen

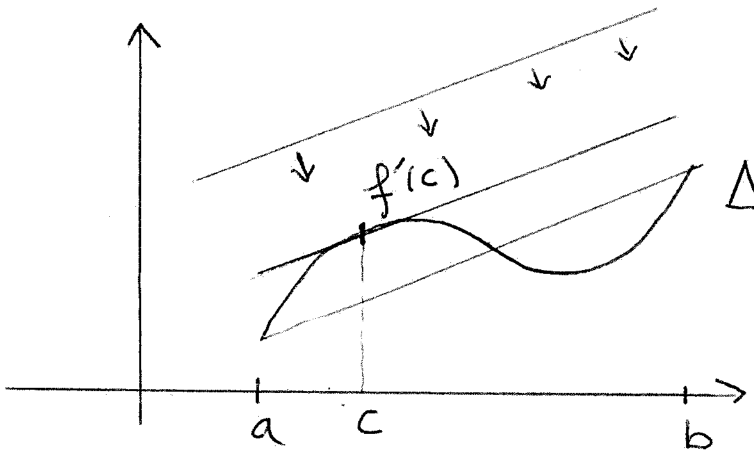
V.2.1 Satz

Seien $-\infty < a < b < +\infty$

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) an jeder Stelle differenzierbar

dann $\exists\, c \in (a,b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



$$\Delta_{ab} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Beweis vom Satz V.2.1

Der Fall $f(a) = f(b) = 0$

Frage: existiert es $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = 0$?

Serie 8 Übung 8.4 es existiert

$\underline{x} \in [a,b]$ und $\overline{x} \in [a,b]$ mit

$$\begin{cases} f(\underline{x}) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \\ \\ f(\overline{x}) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \end{cases}$$

Entweder $f(\overline{x}) > 0$ oder $f(\underline{x}) < 0$

sonst ist f auf $[a,b]$ konstant

und die Antwort zu der Frage ist "Ja"

in diesem Fall.

Falls $f(\bar{x}) > 0 \Rightarrow \forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq f(\bar{x})$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(\bar{x}) - f(x)}{\bar{x} - x} \geqslant 0 & \text{für } x \geq \bar{x} \\[2ex] \dfrac{f(\bar{x}) - f(x)}{\bar{x} - x} \leqslant 0 & \text{für } x \leq \bar{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f'(\bar{x}) = 0 \qquad c := \bar{x}$$

Allgemein Sei

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$g(a) = g(b) = 0$$

$\exists\, c \in (a,b)$ mit $g'(c) = 0$

$$\Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$\square$

V.2.2 Korollar

Sei f auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar

i) Falls $f' \equiv 0$ auf (a,b)
dann ist f konstant

ii) Falls $f' \geq 0$ auf (a,b)
dann ist f monoton wachsend

iii) Falls $f' > 0$ auf (a,b)
dann ist f streng monoton wachsend

V.2.3 Anwendung

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überall differenzierbar so dass es existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \lambda f(x)$$

Dann $\exists c \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = c e^{\lambda x}$$

Beweis der Behauptung

$$f'(x) = \lambda f(x) \Leftrightarrow$$

$$e^{-\lambda x} f'(x) - e^{-\lambda x} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(e^{-\lambda x} f(x) \right) = 0$$

Korollar V.2.2 $\Rightarrow \quad e^{-\lambda x} f(x) \equiv c$

$$\Rightarrow \quad f(x) = c e^{\lambda x}$$

V.2.4 Satz (Bernouilli de l'Hospital)

Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig überall und differenzierbar auf (a,b) mit

i) $g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in (a,b)$

ii) $\quad f(a) = g(a) = 0$

iii) $$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Dann gilt $\forall x \in (a,b)$ $\quad g(x) \neq 0$ und

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A \qquad (*)$$

Beweis vom Satz V.2.4

Indirekt, falls $\exists x_0 \in (a,b)$ mit $g(x_0) = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{g(x_0) - g(a)}{x_0 - a} = 0$$

Mittelwertsatz $\Rightarrow \exists\, c \in (a, x_0) \quad g'(c) = 0$

Wiederspruch!

Beweis vom $(*)$. Sei $s > a$ fest

$$h_s(x) := \frac{f(s)}{g(s)}\, g(x) - f(x)$$

$h_s(a) = 0$ und $h_s(s) = 0$

$\exists\ c_s \in (a, s)$ mit $h_s'(c_s) = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{f'(c_s)}{g'(c_s)}$$

$$\lim_{s \to a^+} c_s = a \quad \Rightarrow \lim_{s \to a^+} \frac{f'(c_s)}{g'(c_s)} = A$$

$\Rightarrow$ (*) $\square$

V.2.5 Anwendung

i) $\sin' x = \cos x$

$\cos' x = -\sin x$

$f(x) = \sin x \qquad g(x) = x$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ii) $$f(x) = 1 - \cos x$$
$$g(x) = x^2$$

$$f'(x) = \sin x \qquad g'(x) = 2x$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

V.2.6 Satz (Umkehrsatz)

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ auf (a,b) und seien

$$-\infty \leq c = \inf_{a<x<b} f(x) < \sup_{a<x<b} f(x) = d \leq +\infty$$

Dann ist $f : (a,b) \to (c,d)$ bijektiv und die Umkehrfunktion

$f^{-1} : (c,d) \longrightarrow (a,b)$ ist

überall differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \forall x \in (a,b)$$

$$\left(\text{d.h.} \quad \forall y \in (c,d) \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \right)$$

Beweis vom Satz V.2.6

Korollar V.2.2 $\Rightarrow$ f ist streng monoton wachsend und stetig

Vom Kapitel IV wir bekommen dass

$f : (a,b) \longrightarrow (c,d)$ bijektiv

und f^{-1} ist stetig.

Behauptung: $\forall y_0 \in (c,d)$ f^{-1} ist an der Stelle y_0 differenzierbar

Sei $y_k \in (c,d)$ $\quad y_k \neq y_0$

$\exists!\, x_k \in (a,b)$ $\quad \exists!\, x_0 \in (a,b)$

mit $f(x_k) = y_k$ und $f(x_0) = y_0$

$$\frac{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(y_0)}{y_k - y_0} = \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)}$$

$$\xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{1}{f'(x_0)}$$

V.2.7 Beispiele

i) $\mathrm{Exp}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ ist streng monoton wachsend

$$\mathrm{Exp}'(x) = \mathrm{Exp}(x)$$

$$\mathrm{Log}\, y = (\mathrm{Exp})^{-1}(y)$$

$$\mathrm{Log}'y = \frac{1}{\mathrm{Exp}(\mathrm{Log}\,y)} = \frac{1}{y}$$

ii) $$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto x^k$$

$$f'(x) = k\,x^{k-1} \qquad f^{-1}(y) = \sqrt[k]{y}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{k\left(\sqrt[k]{y}\right)^{k-1}}$$

$$= \frac{1}{k\left(\sqrt[k]{y}\right)^{k}}\sqrt[k]{y} = \frac{1}{k}\,y^{\frac{1}{k}-1}$$

V.3 Die trigonometrische Funktionen

Einerseits wir haben $\mathrm{Cos}\,\varphi$ und $\mathrm{Sin}\,\varphi$ Mit der Hilfe von Potenzreihen definiert

$$\mathrm{Cos}\,\varphi := \frac{\mathrm{Exp}(i\varphi) + \mathrm{Exp}(-i\varphi)}{2}$$