$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} + \frac{(-i\varphi)^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty} 2(i)^{2p}\frac{\varphi^{2p}}{(2p)!} = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\varphi^{2p}}{(2p)!}$$

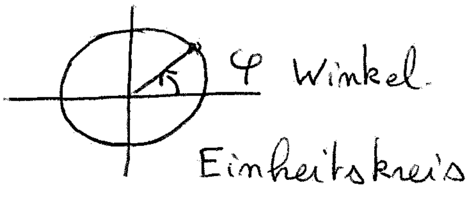
$$\sin\varphi := \frac{\mathrm{Exp}(i\varphi) - \mathrm{Exp}(-i\varphi)}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\varphi)^k}{k!} - \frac{(-i\varphi)^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{p=0}^{\infty} 2(i)^{2p+1}\frac{\varphi^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\varphi^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

Anderseits wir haben in der Schule $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ als die Koordinaten von dem Punkt :



definiert

V.3.1 Satz (Euler)

$\forall \varphi \in \mathbb{R}$ gilt $\begin{cases} \mathrm{Cos}\,\varphi = \cos\varphi \\ \mathrm{Sin}\,\varphi = \sin\varphi \end{cases}$

Beweis vom Satz V.3.1

Wir behaupten zuerst

$\forall \varphi \in \mathbb{R}$ es gilt $\left|\mathrm{Cos}\,\varphi + i\,\mathrm{Sin}\,\varphi\right| \equiv 1$

Beweis der Behauptung

$$\overline{\mathrm{Exp}(i\varphi)} = \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(i\varphi)^k}{k!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{(i\varphi)^k}}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\overline{i\varphi}\right)^k}{k!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-i\varphi)^k}{k!} = \mathrm{Exp}(-i\varphi)$$

Additionstheorem für Exp $\Longrightarrow$

$$|\mathrm{Exp}(i\varphi)|^2 = \mathrm{Exp}(i\varphi)\,\overline{\mathrm{Exp}(i\varphi)}$$

$$= \mathrm{Exp}(i\varphi)\,\mathrm{Exp}(-i\varphi)$$

$$= \mathrm{Exp}(i\varphi - i\varphi) = \mathrm{Exp}(0) = 1$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\mathrm{Exp}(i\varphi)\right) = i\,\mathrm{Exp}(i\varphi)$$

$$= \mathrm{Exp}\left(i\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{Exp}(i\varphi)$$

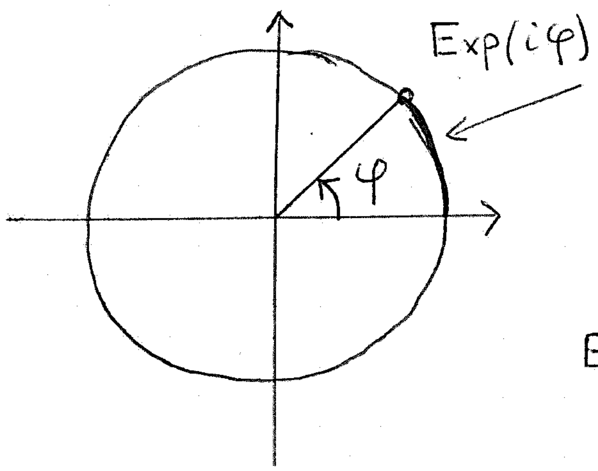
$$= \mathrm{Exp}\left(i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Das impliziert insbesondere

$$\left|\frac{d}{d\varphi}\left(\mathrm{Exp}(i\varphi)\right)\right|^2 = \left|\mathrm{Exp}\left(i\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right|^2$$

$$= 1$$

Die Kurve $\varphi \mapsto \operatorname{Exp}(i\varphi)$ durchläuft den Einheitskreis mit Geschwindigkeit 1



Länge des Bogens $= \varphi$

$$\operatorname{Exp}(i\varphi) = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

$\square$

V.3.2 Korollar

$\forall x \in \mathbb{R}$ es gilt $\operatorname{Exp}(i(x+2\pi)) = \operatorname{Exp}(ix)$

Beweis vom Korollar V.3.2

Additionstheorem für Exp $\Rightarrow$

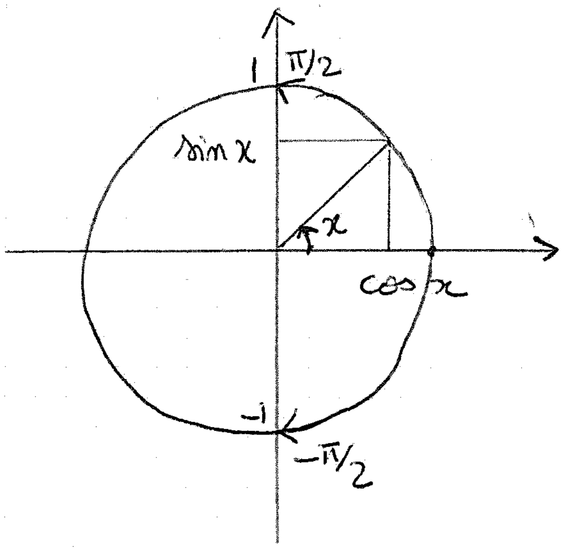
$$\operatorname{Exp}(i(x+2\pi)) = \operatorname{Exp}(ix)\operatorname{Exp}(2i\pi)$$

Aber $\operatorname{Exp}(2i\pi) = \operatorname{Cos}(2\pi) + i \operatorname{Sin}(2\pi) = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$
$= 1$

$\square$

V.3.3 Zyklometrische Funktionen (Arkusfunktionen)

i) $\cos x = \sin' x > 0$ auf $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$



$+1 = \sup\left\{\sin x;\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$-1 = \inf\left\{\sin x;\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$

Umkehrsatz $\Rightarrow$ $\sin : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow (-1, +1)$

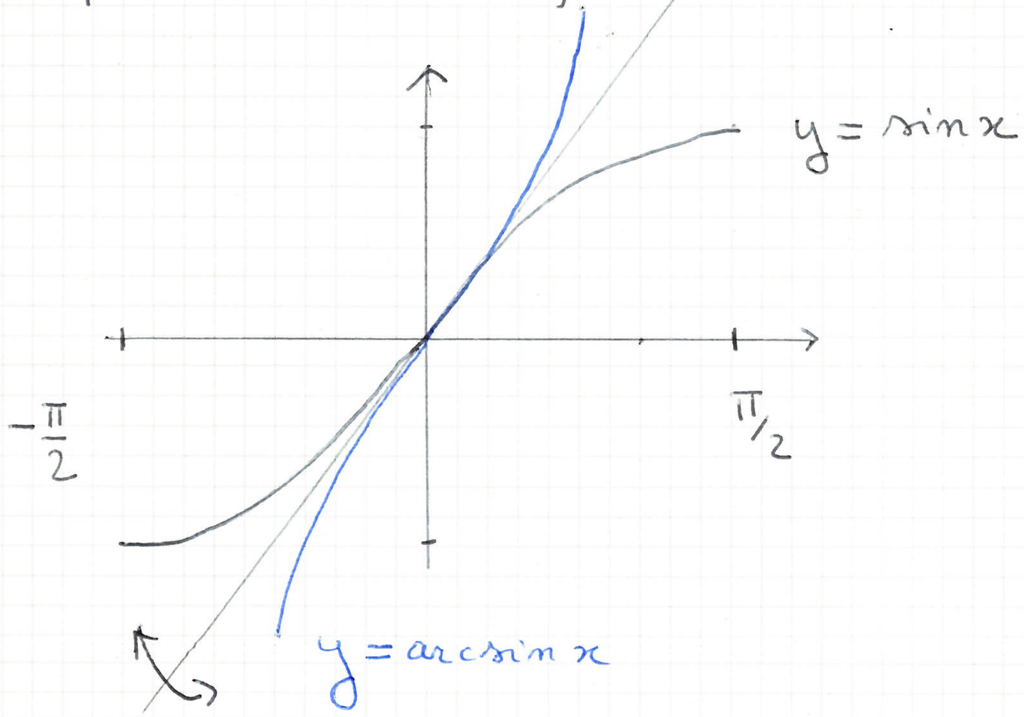
ist streng monoton wachsend und umkehrbar.

Die Umkehrfunktion wird $\arcsin y$ notiert

$\sin^{-1} y = \arcsin y \ : (-1, +1) \longmapsto \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

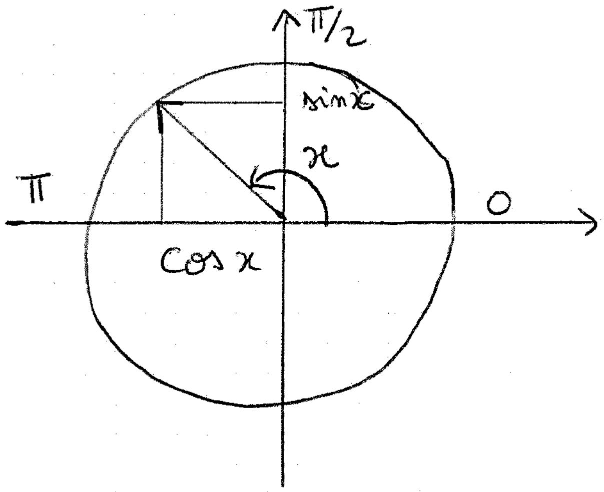


ii) $\cos' x = -\sin x < 0$ auf $(0, \pi)$

$\cos : (0,\pi) \longrightarrow (-1,1)$ ist streng monoton fallend

$$\sup\{\cos x\ ;\ x\in(0,\pi)\} = +1$$

$$\inf\{\cos x\ ;\ x\in(0,\pi)\} = -1$$



Umkehrsatz $\Rightarrow$ $\cos : (0,\pi) \longrightarrow (-1,1)$

besitzt eine Umkehrfunktion

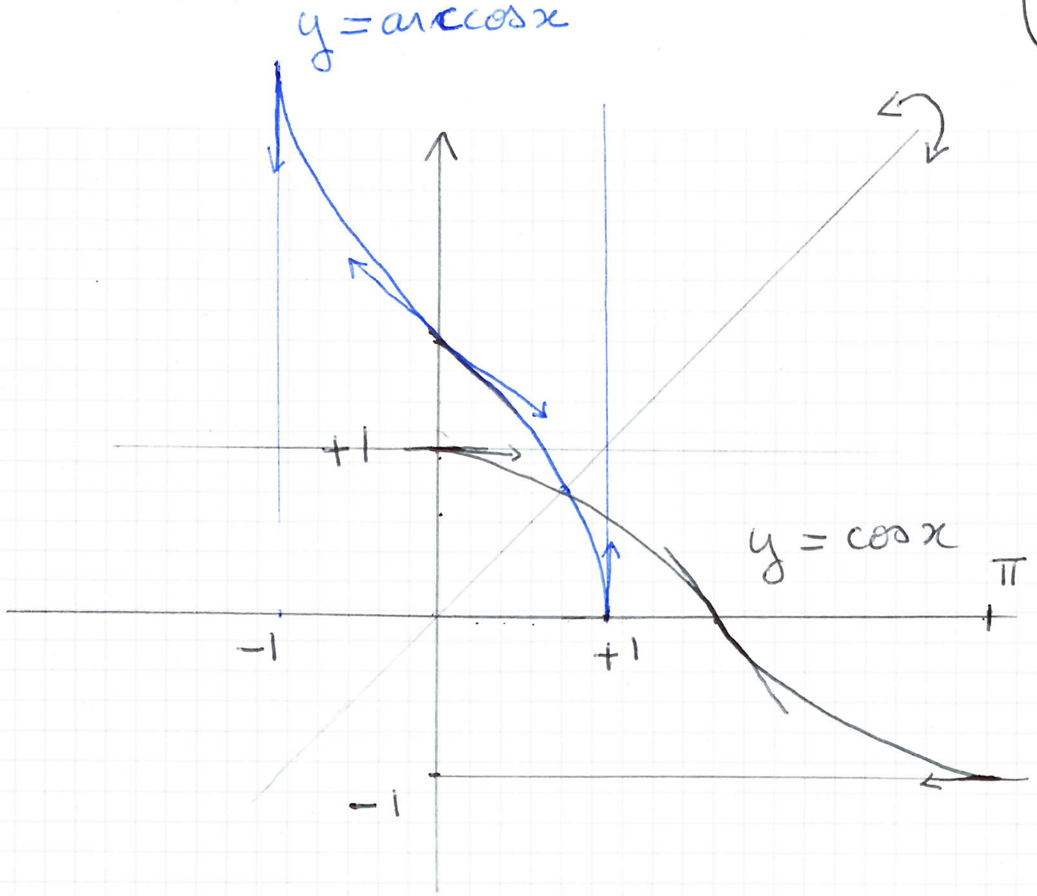
$$\cos^{-1} = \arccos : (-1,1) \longrightarrow (0,\pi)$$

$$\frac{d}{dy}\arccos y = \frac{1}{\cos'(\arccos y)}$$

$$= -\frac{1}{\sin(\arccos y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos y)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

ETH zürich

V.35



iii) $$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$$

f ist dann auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton wachsend

$$\sup\left\{ \tan x \,;\; x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\} = +\infty$$

$$\inf \left\{ \tan x \ , \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \right\} = -\infty$$

Umkehrsatz $\Rightarrow$ die Funktion

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow (-\infty, +\infty)$$

besitzt eine Umkehrfunktion

$$\arctan : (-\infty; +\infty) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

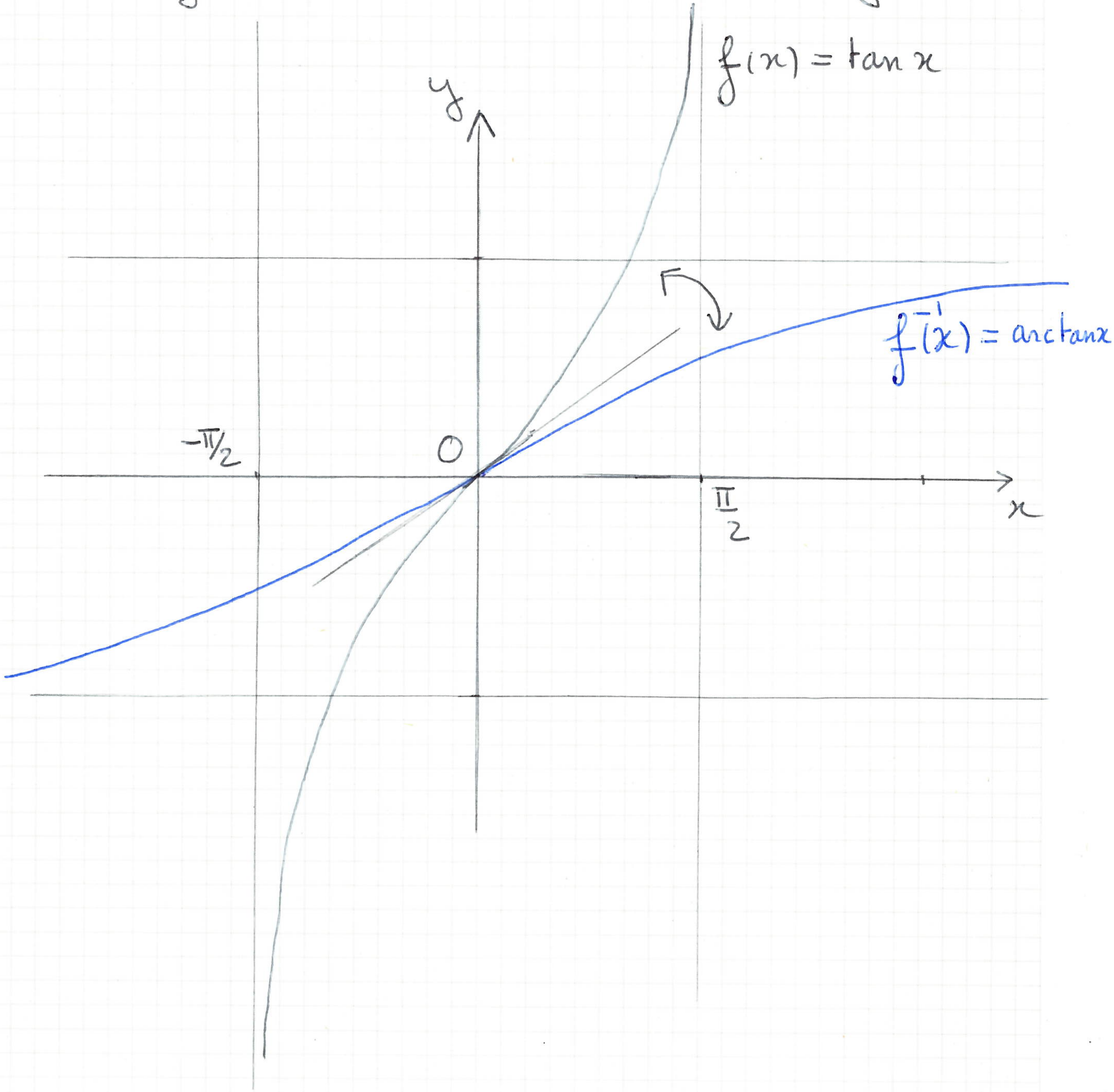
die überall differenzierbar ist.

$$\frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{\tan'(\arctan y)}$$

$$= \cos^2(\arctan y)$$

aber $1 + \tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{1+\tan^2 \arctan y} = \frac{1}{1+y^2}$$



V.3.4 Die Hyperbelfunktionen (Serie 9)

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

V.4 Funktionen der Klasse C^1

V.4.1 Definition

Sei I ein offenes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}^n$. f heisst von der Klasse C^1 falls f auf I differenzierbar ist und die Ableitungsfunktion $x \in I \longmapsto f'(x) \in \mathbb{R}^n$ auf I stetig ist. Diese Menge von Funktionen wird $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ notiert

V.4.2 Beispiele und Gegenbeispiele

i) $\mathrm{Exp}(x) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ garund

$\mathrm{Exp}'(x) = \mathrm{Exp}(x)$ ist überall stetig

ii) $\cos' x = -\sin x$ ist überall stetig

$\sin' x = \cos x$ ist überall stetig

$\Rightarrow$ $\cos x$ und $\sin x$ $\in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

iii) Gegenbeispiel

$$\begin{cases} f(x) := x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ f(0) := 0 \end{cases}$$

f ist überall in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig

Produkt und Verknüpfungen von stetigen Funktionen

f ist auch an der Stelle 0 stetig

Grund: $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \leq |x|^2$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$\underset{x \neq 0}{f'(x)} = 2x \sin \frac{1}{x} - \frac{x^2}{x^2} \cos \frac{1}{x}$$

$$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$|x \sin \tfrac{1}{x}| \leq |x|$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \text{aber} \quad x \mapsto \cos \frac{1}{x}$$

hat an der Stelle 0 kein Limes

Dann hat $f'(x)$ an der Stelle 0 kein Limes. Aber f ist trotzdem an der Stelle 0 differenzierbar

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0}$$

$$= x \sin \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$= 0$$

Also f ist überall differenzierbar aber $x \mapsto f'(x)$ ist an der Stelle 0 nicht stetig

V.5 Punktweise Konvergenz, gleichmässige Konvergenz von Funktionen und Differenzierbarkeit

V.5.1 Definition

Sei I ein Intervall von $\mathbb{R}$ und sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen von I nach $\mathbb{R}^n$

i) Die Folge f_k konvergiert punktweise gegen f falls gilt

$$\forall x \in I \quad \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

ii) Die Folge f_k konvergiert gleichmässig gegen f falls

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in I} \| f_k(x) - f(x) \| = 0$$

V.5.2 Bemerkungen

i) $f_k : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ konvergiert gegen

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gleichmässig $\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \; ; \; \forall k \geq N \quad \forall x \in I$

$$\| f_k(x) - f(x) \| < \varepsilon$$

ii) Gleichmässige Konvergenz

$\Rightarrow$ Punktweise Konvergenz

Das geht nicht umgekehrt:

Gegenbeispiel zu der Reziprok

Sei $f_k : [0,1) \longrightarrow [0,1)$

$$x \longmapsto x^k$$

$\forall x \in [0,1) \qquad \lim_{k \to \infty} x^k = 0$

Al~~so~~ f_k konvergiert punktweise

gegen 0.

Behauptung: diese Konvergenz

ist nicht gleichmässig

Sei $x_k := \sqrt[k]{\frac{1}{2}} \in [0,1)$

$$f_k(x_k) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1)} \| f_k(x) - 0 \| \geq \frac{1}{2}$$

V.5.3 Die Gleichmässige Konvergenz von den partiellen Summen einer Potenzreihe innerhalb des Konvergenzradius

Satz: Seien $a_0, a_1, a_2 \dots a_n \dots \in \mathbb{C}$

so dass

$$0 < \rho := \frac{1}{\limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \leq \infty$$

Dann konvergiert

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

gleichmässig auf $[-r, +r]$

gegen $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

solange $\underline{r < \rho}$

Beweis vom Satz V.5.3

Für $|x| \leqslant r$ gilt (Kapitel III)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |x|^k |a_k| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r^k |a_k|$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} r^k |a_k| < +\infty$$

Das impliziert insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} r^k |a_k| = 0$$

Für $|x| \leqslant r$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-r,+r]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$\square$

V.5.4 Satz Seien $f_k \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ so dass $f_k \to f$ gleichmässig auf I. Dann $f \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ (d.h. f ist auf I überall stetig)

Beweis vom Satz V.5.4

Sei $x_0 \in I$ und sei $\varepsilon > 0$

Da $f_k \to f$ Glm $\exists N$ so dass

$\forall k \geq N \qquad \sup_x \| f_k(x) - f(x) \| < \frac{\varepsilon}{3}$

f_N ist an der Stelle x_0 stetig.

Dann $\exists \delta > 0$ so dass $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \| f_N(x) - f_N(x_0) \| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\| f(x) - f(x_0) \| \leq \| f(x) - f_N(x) \| + \| f_N(x) - f_N(x_0) \| + \| f_N(x_0) - f(x_0) \|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Wir haben $\delta > 0$ gefunden so dass

$\forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ f ist an der Stelle x_0 stetig

V.5.5 Satz Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und so dass

$$\begin{cases} f_k \longrightarrow f & \text{gleichmässig} \\ \text{und} & \\ f_k' \longrightarrow g & \text{gleichmässig} \end{cases}$$

Dann gilt

$$f \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \text{ und } f' = g$$

$\square$

Beweis vom Satz V.5.5

Satz V.5.4 $\Rightarrow$ g ist auf I stetig

Sei $x_0 \in I$ und sei $\varepsilon > 0$

Es existiert $\delta > 0$ so dass

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \| g(x) - g(x_0) \| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall k \geq N$

$$\sup_{x \in I} \| f_k'(x) - g(x) \| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(Gleichmässige Konvergenz)

Sei $c_k(x) \in (x_0, x)$ $\quad (x_0 < x)$

so dass

$$\frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0} = f_k'(c_k(x))$$

Für x fest es gilt

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dann $\exists\ k_0(x)$ so dass $\forall k \geq k_0(x)$

$$\left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f_k'(c_k(x)) \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Wir nehmen $k \geq \operatorname{Max}\{k_0(x), N\}$

$|x - x_0| < \delta \implies$

$$\left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right\|$$

$$\leq \left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f_k'(c_k(x)) \right\| + \left\| f_k'(c_k(x)) - g(c_k(x)) \right\|$$

$$+ \left\| g(c_k(x)) - g(x_0) \right\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\square$

V.5.6 Gegenbeispiel wenn f_k' nicht gleichmässig konvergiert

Sei $f_k(x) := \sqrt{\frac{1}{k^2} + x^2}$

und $f(x) := |x|$

$$|f_k(x) - f(x)| = \left| \sqrt{\tfrac{1}{k^2} + |x|^2} - \sqrt{|x|^2} \right|$$

$$= \left| \frac{\frac{1}{k^2} + |x|^2 - |x|^2}{\sqrt{\frac{1}{k^2} + |x|^2} + \sqrt{|x|^2}} \right| \leq \frac{1}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^2}}}$$

$$= \frac{1}{k} \longrightarrow 0$$

f_k konvergiert gegen f gleichmässig

$$f_k'(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{k^2} + x^2}} \longrightarrow \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} g(x)$$

f_k' konvergiert gegen $g(x)$

punktweise aber nicht gleichmässig

sonst wäre g stetig und $f(x) = |x|$

ist an der Stelle 0 nicht

differenzierbar

V.5.7 Anwendung zu Potenzreihen

Satz Eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

ist im Innern ihres Konvergenzkreises

differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1}$$

Beweis vom Satz V.5.7

Seien $a_k \in \mathbb{C}$ und sei

$$\rho := \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Wir nehmen an dass $\rho > 0$ (ρ darf $+\infty$ sein)

$\forall r < \rho$

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{konvergiert}$$

gleichmässig gegen $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

auf $[-r, +r]$.

Es gilt $\quad f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k x^{k-1}$

$$f_n'(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{n} k a_k x^k$$

Wiederholung aus Kapitel III

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{k} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

d.h. dass f_n und f_n' haben den selben Konvergenzradius ρ

Dann $\forall r < \rho$

$$f_n'(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{n} k a_k x^k$$

konvergiert gleichmässig gegen

$$g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

Satz V.5.5 $\Rightarrow$ f ist differenzierbar

und $f'(x) = g(x)$ $\square$

V.6 Funktionen der Klasse C^m

V.6.1 Definition

Sei I ein offenes Intervall und

$f\ I \to \mathbb{R}^n$; f heisst auf I m Mal differenzierbar falls f auf I $(m-1)$ Mal differenzierbar ist und die $m-1$ Ableitung Funktion von f auch differenzierbar ist. In dem Fall die m-te Ableitung von f wird $f^{(m)}$ oder $\frac{d^m f}{dx^m}$ notiert.

ii) f ist von der Klasse C^m falls f m-Mal differenzierbar ist und $f^{(m)}$ ist stetig. Man schreibt $f \in C^m(I, \mathbb{R}^n)$

iii) Falls $f \in C^m(I, \mathbb{R}^n)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ man schreibt $f \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$.

V.5.2 Beispiele

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

$$f^{(2)}(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

$$\circ \circ \circ$$

Die Ableitung von einem Polynom vom Grad n ist ein Polynom vom Grad $n-1$