f_k' konvergiert gegen $g(x)$

punktweise aber nicht gleichmässig sonst wäre g stetig und $f(x)=|x|$ ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar

V.5.7 Anwendung zu Potenzreihen

Satz Eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

ist im Innern ihres Konvergenzkreises differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1}$$

Beweis vom Satz V.5.7

Seien $a_k \in \mathbb{C}$ und sei

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Wir nehmen an dass $\rho > 0$ (ρ darf $+\infty$ sein)

$\forall r < \rho$

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{konvergiert}$$

gleichmässig gegen $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

auf $[-r, +r]$.

Es gilt $\quad f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k x^{k-1}$

$$f_n'(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{n} k a_k x^k$$

Wiederholung aus Kapitel III

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{k} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

d.h. dass f_n und f_n' haben den selben Konvergenzradius ρ

Dann $\forall r < \rho$

$$f_n'(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{n} k a_k x^k$$

konvergiert gleichmässig gegen

$$g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

Satz V.5.5 $\Rightarrow$ f ist differenzierbar und $f'(x) = g(x)$ $\square$

V.6 Funktionen der Klasse C^m

V.6.1 Definition

Sei I ein offenes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}^n$. f heisst auf I m Mal differenzierbar falls f auf I $(m-1)$ Mal differenzierbar ist und die $m-1$ Ableitung Funktion von f auch differenzierbar ist. In dem Fall die m-te Ableitung von f wird $f^{(m)}$ oder $\frac{d^m f}{dx^m}$ notiert.

ii) f ist von der Klasse C^m falls f m-Mal differenzierbar ist und $f^{(m)}$ ist stetig. Man schreibt $f \in C^m(I, \mathbb{R}^n)$

iii) Falls $f \in C^m(I, \mathbb{R}^n)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ man schreibt $f \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$.

V.6.2 Beispiele

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

$$f^{(2)}(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

$$\cdots$$

Die Ableitung von einem Polynom vom Grad n ist ein Polynom vom Grad $n-1$

ii) Eine Potenzreihe ist C^∞ innerhalb $(-\rho, \rho)$ wobei

$\rho =$ Konvergenzradius der Reihe

Grund: Satz V.5.7 $\Rightarrow$

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit

$$0 < \rho := \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Dann ist f auf $(-\rho, +\rho)$ von der Klasse C^1 und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{k |a_k|} = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius von f = Konvergenzradius von f'

V.7 Taylor Formel

Wir haben Funktionen der Klasse C^m eingeführt aber wir sollen uns die Frage stellen: Warum brauchen wir so viele Ableitungen?

Antwort: das ist nützlich um allgemeine Funktionen die "glatt genug" sind durch einfache Funktionen (Polynome) zu approximieren.

V.7.1 Satz (Taylor Entwicklung)

Sei I ein offenes Intervall von $\mathbb{R}$ und sei $f \in C^m(I)$ so dass $f^{(m)}$ auf I überall differenzierbar ist.

$\forall\, a < b \quad a, b \in I$

$\exists\, c \in (a, b)$ mit

$$f(b) = f(a) + f'(a)\,(b-a) + \cdots + f^{(k)}(a)\,\frac{(b-a)^k}{k!}$$

$$\cdots + f^{(m)}(a)\,\frac{(b-a)^m}{m!}$$

$$+ f^{(m+1)}(c)\,\frac{(b-a)^{m+1}}{m+1!}$$

$$T_m f(a)(x) := \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(a)\,\frac{(x-a)^k}{k!}$$

heisst das Taylor Polynom von f m-ter Ordnung an der Stelle a und

$$R_m f(a)(x) := f(x) - T_m f(a)(x)$$

ist der sogenannte "Restterm"

V.7.2 Interpretation

Falls $f \in C^{m+1}(I)$ dann ist

$T_{m+1} f(a)(x)$ eine Approximierung

von f an der Stelle a:

$$\left| f(x) - T_{m+1} f(a)(x) \right|$$

$$= \left| f^{(m+1)}(c_x) \frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!} - f^{(m+1)}(a) \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1!} \right|$$

$$\leqslant \underbrace{\left| f^{(m+1)}(c_x) - f^{(m+1)}(a) \right|}_{\xrightarrow{x \to a} 0} \frac{|x-a|^{m+1}}{(m+1)!}$$

$|x-a|^{m+1}$ ist viel kleiner als

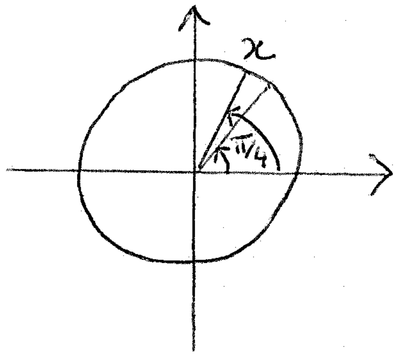
$|x-a|^k$ für $k \leq m$: $\lim\limits_{x \to a} \frac{|x-a|^{m+1}}{|x-a|^k}$

d.h. Je höher m ist desto besser das Taylor Polynom $T_m f(a)(x)$ in der Nähe von a, f approximiert.

V.7.3 Konkretes Beispiel

Sei $f(x) = \sin x$ und $a = \frac{\pi}{4}$

Wir versuchen in der Nähe von $\frac{\pi}{4}$ mit einem Polynom zu approximieren



$$\sin x = T_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)(x) + \sin^{(3)} c \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{3!}$$

Wobei $c \in (a, x)$

$$T_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)(x) = \sin\frac{\pi}{4} + \sin'\frac{\pi}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^{(2)}\frac{\pi}{4}\frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin'\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin''\frac{\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T_2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2}\right)$$

Satz V.7.1 $\Rightarrow$

$$\left|\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right)\right|$$

$$\leqslant |\sin^{(3)} c| \frac{\left|x-\frac{\pi}{4}\right|^3}{3!}$$

$$= \frac{|\cos c|}{3!}\left|x-\frac{\pi}{4}\right|^3$$

$$\leqslant \frac{\left|x-\frac{\pi}{4}\right|^3}{6}$$

Beispiel $\left|x-\frac{\pi}{4}\right| = \frac{1}{10} \Rightarrow \left|x-\frac{\pi}{4}\right|^3 = \frac{1}{1000}$

$$\Rightarrow \left|\sin x - T_2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)(x)\right| \leqslant \frac{1}{6000}$$

$\left|x-\frac{\pi}{4}\right|^4 = \frac{1}{10000} \Rightarrow \left|\sin x - T_3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)(x)\right| < \frac{1}{24000}$

$4! = 24$ ...

Beweis des Satzes V.7.1

Sei $g(x) := f(b) - \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(x) \frac{(b-x)^k}{k!} - K \frac{(b-x)^{m+1}}{(m+1)!}$

Wir nehmen K so dass

$g(a) = 0$. Es ist klar dass

$g(b) = 0$.

- MWS $\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ mit $g'(c) = 0$

$$g'(x) = -\sum_{k=0}^{m} f^{k+1}(x) \frac{(b-x)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{k}(x)}{k!} k (b-x)^{k-1}$$

$$+ K \frac{(b-x)^m}{m!} \qquad j = k-1$$

$$= -\sum_{k=0}^{m} f^{(k+1)}(x) \frac{(b-x)^k}{k!} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j+1)}(x)}{j!} (b-x)^j$$

$$+ K \frac{(b-x)^m}{m!}$$

$$= -f^{(m+1)}(x) \frac{(b-x)^m}{m!} + K \frac{(b-x)^m}{m!}$$

$$g'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad -f^{(m+1)}(c) + K = 0$$

Dann bekommt man aus $g(a)=0$

$$0 = g(a) = f(b) - T_m f(a)(b) - f^{(m+1)}(c) \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!}$$

$\Rightarrow$ Satz V.7.1

V.8 Globale und lokale Extrema:

die Ausnützung von Ableitungen um Extrema zu charakterisieren.

V.8.1 Definition

Sei I ein <u>offenes</u> Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$

$x_0 \in I$ heisst globale $\begin{cases} \text{maximale} \\ \text{minimale} \end{cases}$ Stelle

falls $\quad \forall x \in I \quad \begin{cases} f(x) \leqslant f(x_0) \\ f(x_0) \leqslant f(x) \end{cases}$

$x_0 \in I$ heisst lokale $\begin{cases} \text{maximale} \\ \text{minimale} \end{cases}$

Stelle falls $\exists\, \delta > 0$

$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\begin{cases} f(x) \leq f(x_0) \\ f(x_0) \leq f(x) \end{cases}$

V.8.2 Satz

Sei I ein offenes Intervall und

$f \in C^1(I; \mathbb{R})$

$x_0 \in I$ ist eine lokale extremale

(minimale oder maximale) Stelle

dann gilt $f'(x_0) = 0$

Falls $f \in C^2(I; \mathbb{R})$. Sei $x_0 \in I$

mit $f'(x_0) = 0$

Falls $f''(x_0) > 0$ dann bildet x_0

eine lokale minimale Stelle.

Falls $f''(x_0) < 0$ dann bildet x_0 eine lokale maximale Stelle.

Warnung: $f(x) = x^3$
$f'(0) = 0$ aber
0 ist keine max/min Stelle.

V.8.3 Beispiel

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2(x^2-1)$$

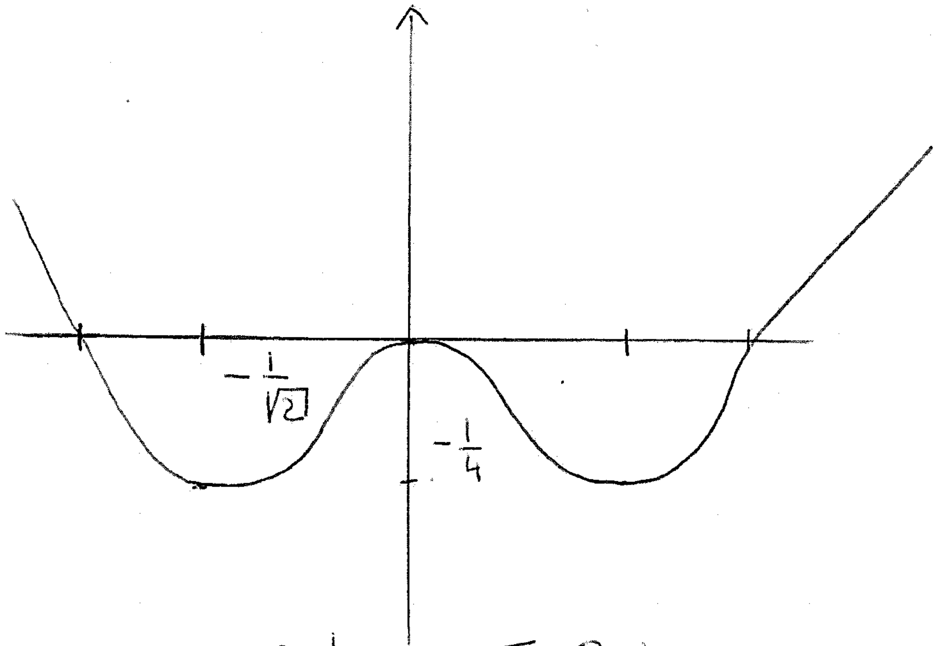
$$f'(x) = 2x(x^2-1) + 2x^2 x$$
$$= 2x(2x^2-1)$$

$$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = +\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$f''(x) = 2(2x^2-1) + 8x^2 = 12x^2 - 2$$

$f''(0) = -2 < 0$ lokal Maximum

$f''\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 > 0$ lokale Minima



Beweis vom Satz V.8.1

Falls $\forall x \in I \quad f(x) \leq f(x_0)$

dann für $x > x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

und für $x < x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$\Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$

Jetzt nehmen wir $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ und $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$

Taylor Entwicklung der Ordnung 1

$\exists\, c_{x,x_0} \in (x_0, x)$ mit

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(c_{x,x_0}) \frac{(x-x_0)^2}{2!}$$

$$\lim_{x \to x_0} c_{x,x_0} = x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f''(c_{x,x_0}) = f''(x_0) >$$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ so dass $|x - x_0| < \delta$

$$f''(c_{x,x_0}) > \frac{f''(x_0)}{2}$$

$\Rightarrow \quad f(x) \geq f(x_0) \quad$ für $|x - x_0| < \delta$

($f(x) > f(x_0)$ für $x \neq x_0$ und $|x - x_0| < \delta$)

x_0 ist eine lokale minimale Stelle.

V.9 Konvexe Funktionen

Funktionen für welche $f''(x) > 0$ überall können nur Minima haben.

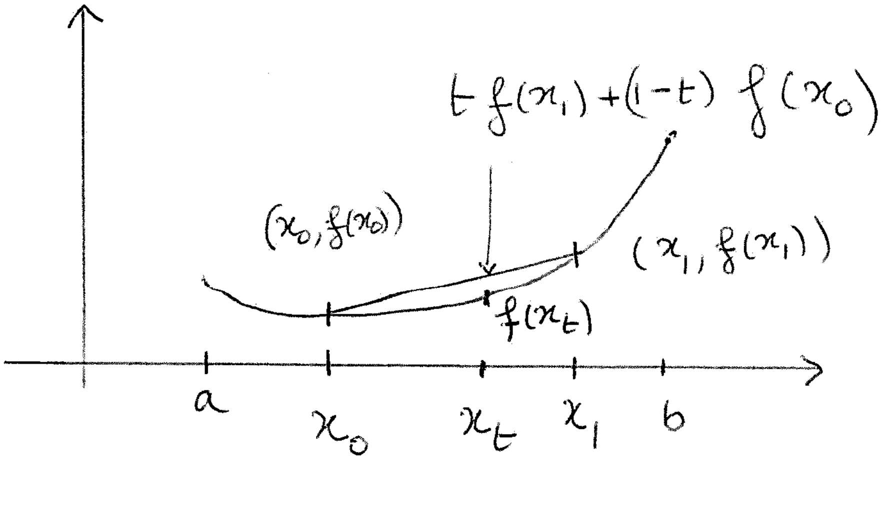
V.9.1 Satz

Sei $f \in C^2((a,b))$ mit $f'' \geq 0$ auf (a,b). Dann gilt

$$\forall \quad a < x_0 < x_1 < b \qquad \forall\, t \in [0,1]$$

$$f(\underbrace{t x_1 + (1-t) x_0}_{= x_t}) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_0) \qquad \square$$

geometrische Interpretation



$t \longmapsto x_t = t x_1 + (1-t) x_0$ ist eine Parametrisierung von $[x_0, x_1]$

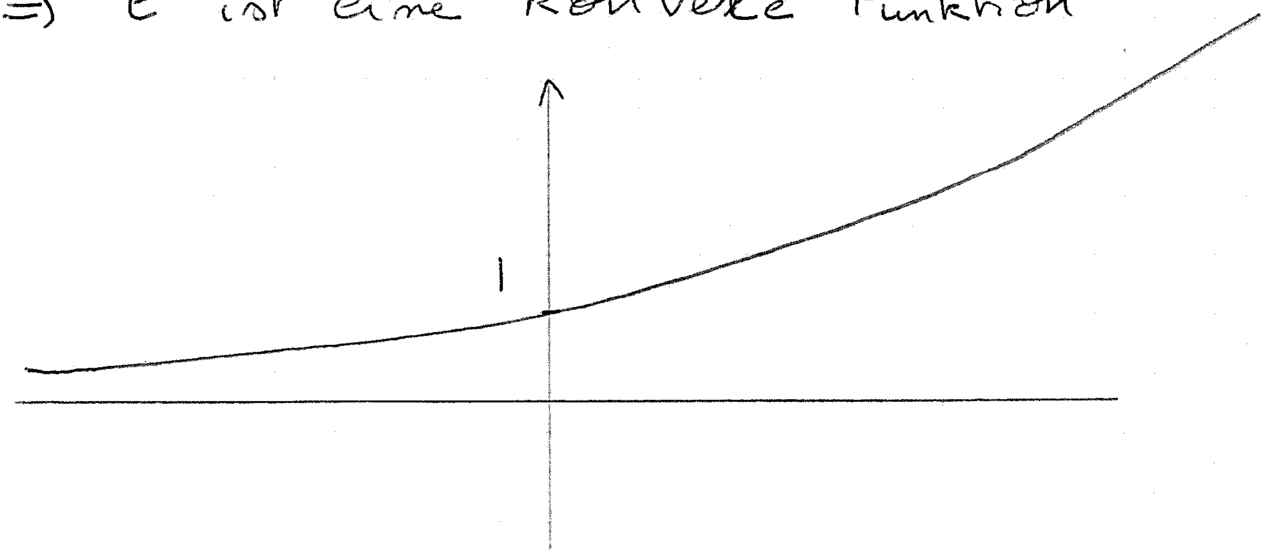
Die Strecke die $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ verbindet befindet sich über den Graph von f.

D.h: der Graph von f wird "nach oben gekrümmt"

V.9.2 Beispiele

i) $f(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x$

$\Rightarrow$ e^x ist eine konvexe Funktion



ii) $f(x) = x^\alpha = \mathrm{Exp}(\alpha \,\mathrm{Log}\, x)$

$\alpha > 1$, $x > 0$ $\qquad f'(x) = \dfrac{\alpha}{x} \mathrm{Exp}(\alpha \,\mathrm{Log}\, x)$

$$\Rightarrow f'(x) = \alpha \operatorname{Exp}(-\operatorname{Log} x)\operatorname{Exp}(\alpha \operatorname{Log} x)$$

$$= \alpha \operatorname{Exp}((\alpha-1)\operatorname{Log} x)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \alpha \frac{(\alpha-1)}{x} \operatorname{Exp}((\alpha-1)\operatorname{Log} x)$$

$$= \alpha(\alpha-1)\operatorname{Exp}(-\operatorname{Log} x)\operatorname{Exp}((\alpha-1)\operatorname{Log} x)$$

$$= \alpha(\alpha-1)\operatorname{Exp}((\alpha-2)\operatorname{Log} x) > 0$$

$$= \alpha(\alpha-1)\, x^{\alpha-2}$$

Beweis von dem Satz V.9.1

Sei $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto f(tx_1 + (1-t)x_0) - t f(x_1) - (1-t) f(x_0)$$

Es gilt $g(0) = g(1) = 0$

$$g'(t) = (x_1 - x_0) f'(tx_1 + (1-t)x_0) - f(x_1) + f(x_0)$$

$$g''(t) = (x_1 - x_0)^2 f''(tx_1 + (1-t)x_0) \geq 0$$

V.71

Nehmen wir an dass g nicht negativ auf $[0,1]$ ist. Da g stetig ist, g nimmt ihren maximalen Wert auf der Strecke $[0,1]$ d.h.

$\exists\, t_{Max} \in [0,1]$ mit $g(t_{Max}) = Max\{g(t);\, t \in [0,1]\}$

und $g(t_{Max}) > 0$. Satz V.8.1 $\Rightarrow g'(t_{Max}) = 0$

Taylor Entwicklund der Ordnung 1 an der Stelle t_{Max} gibt

$$\forall t \in [0,1] \quad g(t) = g(t_{Max}) + g'(t_{Max})(t - t_{Max}) + g''(c)\,\frac{(t-t_{Max})^2}{2}$$

$$\Rightarrow g(t) = g(t_{Max}) + g''(c)\,\frac{(t-t_{Max})^2}{2} \geqslant g(t_{Max}) > 0$$

aber $g(0) = g(1) = 0$ wiederspruch!