VI INTEGRATION

VI.1 Stammfunktionen

VI.1.1 Definition

Seien $-\infty < a < b < +\infty$ und $f \in C^0((a,b),\mathbb{R}^m)$

Eine Funktion $F \in C^1((a,b),\mathbb{R}^m)$ heisst Stammfunktion zu f falls gilt

$$\forall x \in (a,b) \qquad F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

VI.1.2 Beispiele

$$\mathrm{Exp}'(x) = \mathrm{Exp}(x) \quad , \quad \mathrm{Log}'x = \frac{1}{x}$$

$\Downarrow$

Exp ist eine SF zu sich selbst

$\mathrm{Log}\,x$ ist eine SF zu $\frac{1}{x}$

(Das ist die einzige ~~so~~ modulo Multiplikation mit einer Konstant)

$y' = y$

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$\Rightarrow$ arctan ist eine SF zu $\frac{1}{1+x^2}$ ...

VI.1.3 Satz Sind F_1 und $F_2 \in C^1((a,b))$ beide Stammfunktionen zu $f \in C^0((a,b))$ so gilt

$$F_1 - F_2 = c \in \mathbb{R}$$

Konstante

Beweis $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$

Korollar V.2.2 i) $\Rightarrow$ Das Ergebniss

VI.1.4 Definition Sei $f \in C^0((a,b))$

Seien $x_0, x \in (a,b)$ und F eine Stammfunktion zu f. Man definiert das Integral von f zwischen x_0 und x

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = F(x) - F(x_0)$$

$$\left(\Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = - \int_{x}^{x_0} f(t)\,dt \right)$$

Bemerkung $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ wie wir es definiert haben ist von der Wahl der Stammfunktion zu f unabhängig.

VI.1.5 Satz

i) Linearität Seien $f, g \in C^0((a,b))$ mit Stammfunktionen F und $G \in C^1((a,b))$.

Dann ist $\alpha F + \beta G$ eine Stammfunktion zu $\alpha f + \beta g$

ii) Partielle Integration

Seien $u, v \in C^1((a,b))$ so dass $f = uv'$ stetig ist und eine Stammfunktion F besitzt. Dann besitzt $u'v$ eine Stammfunktion und es gilt

$\forall x, x_0 \in (a,b)$

$$\int_{x_0}^{x} u'(t)v(t)\,dt = \underbrace{\Big[u(t)v(t)\Big]_{x_0}^{x}}_{= u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0)} - \int_{x_0}^{x} u(t)v'(t)\,dt$$

Beweis

$$\frac{d}{dt}(uv) = u'v + uv' \quad \ldots$$

VI.1.6 Beispiel

i) $$\int_1^x \operatorname{Log} t\,dt = x \operatorname{Log} x - \operatorname{Log} 1 - \int_1^x dt$$

$$= x \operatorname{Log} x - x + 1$$

$\begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = \operatorname{Log} t \end{cases}$

$u(t)v'(t) = 1$ besitzt eine Stammfunktion

ii) $\int_0^x e^{-t}\, t\, dt$

$$\begin{cases} u(t) = -e^{-t} \Rightarrow u'(t) = e^{-t} \\ v(t) = t \end{cases}$$

$$\int_0^x e^{-t}\, t\, dt = \Big[-e^{-t}\, t\Big]_0^x + \int_0^x e^{-t}\, dt$$

$$= -xe^{-x} + \Big[-e^{-t}\Big]_0^x$$

$$= -x e^{-x} - e^{-x} + 1$$

Behauptung $f(t) := e^{-t}\, t^k$ besitzt eine Stammfunktion

Induktions Beweis

$$\begin{cases} u(t) = -e^{-t} \Rightarrow u'(t) = e^{-t} \\ v(t) = t^{k+1} \end{cases}$$

$$I_{k+1}(x) = \int_0^x e^{-t}\, t^{k+1}\, dt = \Big[-e^{-t}\, t^{k+1}\Big]_0^x + \int_0^x e^{-t}\, t^k (k+1)\, dt$$

$$\Rightarrow \left(e^{-t} t^{k} \text{ hat eine SF} \Rightarrow e^{-t} t^{k+1} \text{ hat eine SF} \right)$$

und

$$I_{k+1}(x) = -x^{k+1} e^{-x} + (k+1)\, I_k(x)$$

$$\Rightarrow I_{k+1}(x) = -x^{k+1} e^{-x} + (k+1)\left(-x^{k} e^{-x} + k\, I_{k-1}(x)\right)$$

$$= \dots$$

$$= -\sum_{l=2}^{k+1} x^{l} \frac{(k+1)!}{l!} e^{-x} + (k+1)!\, I_1$$

$$= -\sum_{l=0}^{k+1} x^{l} \frac{(k+1)!}{l!} e^{-x} + (k+1)!$$

Beobachtung

$$x \geq 1 \qquad \frac{e^{x}}{x^{l}} \geq \sum_{k=l}^{\infty} \frac{x^{k-l}}{k!}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{e^{x}}{x^{l}} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to \infty} x^{l} e^{-x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} I_{k+1}(x) = (k+1)! \Rightarrow k! = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{k}\, dt$$

$\lim_{x \to \infty} \int_0^{x} e^{-t} t^{k}\, dt$

VI.1.7 Satz (Monotonie) I offenes Intervall.

Seien $f, g \in C^0(I)$ mit Stammfunktionen F und $G \in C^1(I)$. Falls $f \leq g$ auf I dann gilt $\forall\, x_0, x_1 \in I$ und $x_0 < x_1$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(t)\, dt \leq \int_{x_0}^{x_1} g(t)\, dt$$

$\left(\text{Falls } x_0 > x_1 \quad \int_{x_0}^{x_1} f(t)\, dt \geq \int_{x_0}^{x_1} g(t)\, dt \right)$

Beweis vom Satz VI.1.7

Sei $h := g - f$ und $H = G - F$

$\Rightarrow H' = G' - F' = g - f$ und $\int_{x_0}^{x_1} h(t)\, dt = H(x_1) - H(x_0)$

$g \geq f \underset{\text{Korollar V.2.2}}{\Leftrightarrow} H$ ist monoton wachsend $\Rightarrow H(x_1) \geq H(x_0)$

$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} h(t)\, dt \geq 0$ Linearität des Integrals $\Rightarrow$

$$\int_{x_0}^{x_1} g(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_1} h(t)\,dt \geq 0 \quad \square$$

VI.1.8 Beispiel

Behauptung $\forall k \in \mathbb{N}$ $\sin^k x$ besitzt eine Stammfunktion

Es ist klar für $k=1$: $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$

für $k=2$:

$$\int_0^x \sin^2 t\,dt$$

$$\begin{cases} u(t) = -\cos t & \Rightarrow \quad u'(t) = \sin t \\ v(t) = \sin t \end{cases}$$

$$\int_0^x \sin^2 t\,dt = \Big[-\cos t \sin t\Big]_0^x + \int_0^x \cos^2 t\,dt$$

$$= -\cos x \sin x + \int_0^x 1 - \sin^2 t\,dt$$

$$2\int_0^x \sin^2 t = x - \cos x \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(x - \cos x \sin x)\right) = \sin^2 x$$

Allgemein

$$\int_0^x \sin^{k+1} t \, dt$$

$$\begin{cases} u(t) = -\cos t \\ v(t) = \sin^k t \end{cases}$$

$$\int_0^x \sin^{k+1} t \, dt = \int_0^x \sin t \sin^k t = \left[-\cos t \sin^k t\right]_0^x$$

$$+ k \int_0^x \cos^2 t \sin^{k-1} t \, dt$$

$$= -\cos x \sin^k x + k \int_0^x \sin^{k-1} t \, dt - k \int_0^x \sin^{k+1} t \, dt$$

$$\Rightarrow \quad (1+k) \int_0^x \sin^{k+1} t \, dt = -\cos x \sin^k x + k \int_0^x \sin^{k-1} t \, dt$$

Folgerung $\sin^{k-1} t$ hat eine Stammfunktion

$\Rightarrow \sin^{k+1} t$ " " "

Da ~~sin~~ $\sin t$ und $\sin^2 t$ Stammfunktionen besitzen, dankt eine Induktion bekommen wir dass $\sin^k t$ eine Stammfunktion für alle $k \in \mathbb{N}$ besitzt.

Sei $I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k t \, dt$

Wir haben bewiesen

$$(1+k) \, I_{k+1} = k \, I_{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad I_{2n} = \frac{(2n-1)}{2n} \frac{(2n-3)}{(2n-2)} \cdots \frac{1}{2} I_0$$

$I_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \, 2^{2n}} \frac{\pi}{2}$$

In einer ähnlichen Weise gilt

$$I_{2n+1} = \frac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n+1)!}$$

$$\forall t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \qquad 0 \leq \sin t \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \sin^{k+1} t \leq \sin^{k} t$$

$$\Rightarrow \qquad I_{k+1} \leq I_k$$

Satz VI.1.7
Monotonie

Insbesondere

$$I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}} \frac{\pi}{2} \leq \frac{\left(2^{n-1}(n-1)!\right)^2}{(2n-1)!} = \frac{1}{(2n)^2} \frac{(2^n n!)^2}{(2n-1)!}$$

$$\Longrightarrow \quad \underset{= b_n}{\underbrace{\frac{\left(2^n n!\right)^4}{\left((2n)!\right)^2 (2n+1)}}} \leq \frac{\pi}{2} \leq \underset{= a_n}{\underbrace{\frac{\left(2^n n!\right)^4}{2n\left((2n)!\right)^2}}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \qquad b_n \text{ ist beschränkt}$$

$$|a_n - b_n| = \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| \, |b_n| \leq \frac{\pi}{2} \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right|$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} |a_n - b_n| = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \frac{(2^n n!)^4}{((2n)!)^2}}$$

das Wallissche Produkt

<u>VI</u>.1.8 Satz (Gebietsadditivität des Integrals)

Sei I ein offenes Intervall. Sei $f \in C^0(I)$

mit Stammfunktion $F \in C^1(I)$

Seien $x_0, x_1, x_2 \in I$. Dann gilt

$$\int_{x_0}^{x_2} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$

VI.1.9 Satz (Substitutionsregel)

Seien $g \in C^1(I, \mathbb{R})$ und $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

$\forall\, x_0, x_1 \in I$ gilt

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(g(t))\, g'(t)\, dt = \big[f \circ g \big]_{x_0}^{x_1}$$

$$= f(g(x_1)) - f(g(x_0))$$

$$= \int_{g(x_0)}^{g(x_1)} f'(s)\, ds$$

Beweis: Kettenregel

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f'(g(t))\, g'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x_1} (f \circ g)'(t)\, dt$$

$$= f \circ g(x_1) - f \circ g(x_0)$$

VI.1.10 Beispiele

i) $$\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \qquad g(t) = 1+t^2$$
$$g'(t) = 2t$$

$$\|$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{g'(t)}{\sqrt{g(t)}}\,dt \qquad f(s) = \sqrt{s}$$
$$f'(s) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$\|$$

$$\Big[\sqrt{g(t)}\Big]_0^2$$

$$\|$$

$$\Big[\sqrt{1+t^2}\Big]_0^2 = \sqrt{5} - 1$$

ii) $$\int_0^1 \frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(\operatorname{Log} g(t)\Big)\,dt = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{Log}(1+t^2)\Big]_0^1$$
$$= \frac{\operatorname{Log} 2}{2}$$

iii) Anfangswert problem:

Man sucht die Lösung von

$$(*) \begin{cases} f'(x) = a(x)\, f(x) & x \geq 0 \\ f(0) = f_0 \end{cases}$$

wobei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $a \in C^0(\mathbb{R})$

besitzt eine Stammfunktion

$$A(x) = \int_0^x a(t)\, dt$$

Man darf die gewöhnliche Differentialgleichung $(*)$ so schreiben ($\text{solange } f(x) \neq 0$)

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{Log} f(x)\right] = \frac{f'(x)}{f(x)} = a(x)$$

$$\operatorname{Log} f(x) - \operatorname{Log} f(0) = \int_0^x a(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f(0)\, e^{\int_0^x a(t)\,dt} \neq 0 \quad \forall x \geq 0$$

iv) Seien a und $b \in C^0(\mathbb{R})$

a besitzt eine Stammfunktion

$$A(x) := \int_0^x a(t)\,dt$$

Man sucht die Lösung von

$$(**) \quad \begin{cases} f'(x) = a(x)\, f(x) + b(x) \\ f(0) = f_0 \end{cases}$$

Man multipliziert die Gleichung $(**)$ mit $e^{-A(x)}$. Das liefert

$$f'(x)\, e^{-A(x)} - a(x)\, e^{-A(x)} f(x) = e^{-A(x)} b(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(f(x)\, e^{-A(x)} \right) = e^{-A(x)}\, b(x)$$

Falls die stetige Funktion $e^{-A(x)} b(x)$ eine Stammfunktion besitzt (Man beweist später in diesem Kapitel dass es immer der Fall für stetige Funktionen ist) dann gilt

$$f(x)\, e^{-A(x)} - f(0) = \int_0^x e^{-A(t)}\, b(t)\, dt$$

d. h.

$$f(x) = e^{\int_0^x a(t)dt} \int_0^x e^{-\int_0^t a(s)ds}\, b(t)\, dt$$

$$+ \; e^{\int_0^x a(t)dt} f(0)$$

VI.1.11 Partialbruchzerlegung

Es geht hier darum eine Stammfunktion für

$$r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$$

wobei p und q polynome sind zu finden

Zuerst wir schauen ein Beispiel

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = ? \qquad |x| < 1$$

Man schreibt $\displaystyle \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)$$

Beobachtung $\displaystyle \frac{d}{dt} \operatorname{Log}(1-t) = -\frac{1}{1-t}$

und $\displaystyle \frac{d}{dt} \operatorname{Log}(1+t) = \frac{1}{1+t}$

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\operatorname{Log}(1-t)\Big]_0^x + \frac{1}{2}\Big[\operatorname{Log}(1+t)\Big]_0^x$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\operatorname{Log}(1+x) - \operatorname{Log}(1-x)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \operatorname{Log}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Satz Seien p und q zwei Polynome mit

$\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$ und

$$q(x) = \prod_{i=1}^{\ell} (x - x_i)^{m_i}$$

(m_i heisst die Vielfachheit der Nullstelle x_i)

mit $p(x_i) \neq 0 \quad \forall i = 1 \ldots \ell$

Dann gibt es eine Partialbruchzerlegung

für $\frac{p}{q}$ von der Form

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{c_{ik}}{(x-x_i)^k}$$

Warum diese Partialbruchzerlegung für die Ausrechnung des Integralls

$$\int_a^x \frac{p(t)}{q(t)}\, dt$$

nützlich ist?

$t - x_i = s$

$k>1$ $$\int_a^x \frac{dt}{(t-x_i)^k} = \int_{a-x_i}^{x-x_i} \frac{ds}{s^k}$$

$x_i \notin [a,x]$

$$= \left[\frac{s^{-k+1}}{-k+1} \right]_{a-x_i}^{x-x_i} = \ldots$$

$k=1$ $$\int_a^x \frac{dt}{t-x_i} = \int_{a-x_i}^{x-x_i} \frac{ds}{s} = \Big[\operatorname{Log} s \Big]_{a-x_i}^{x-x_i} = \ldots$$

VI.1.12 Beispiel

Berechnen Sie für $|x|<1$

$$\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)(1+t)}$$

$$\frac{1}{(1-t^2)(1+t)} = \frac{1}{(1-t)(1+t)(1+t)} = \frac{1}{(1-t)(1+t)^2}$$

Satz VI.1.11 $\Rightarrow$ $\exists\, c_1, c_2$ und c_3 so dass

$$\frac{1}{(1-t)(1+t)^2} = \frac{c_1}{1-t} + \frac{c_2}{1+t} + \frac{c_3}{(1+t)^2} \qquad (*)$$

Wir bestimmen c_1, c_2 und c_3.

Wir multiplizieren $(*)$ mit $(1+t)^2(1-t)$

Das liefert

$$1 = c_1(1+t)^2 + c_2(1-t)(1+t) + c_3(1-t)$$

$$(c_1-c_2)t^2 + (2c_1-c_3)t + c_1+c_2+c_3-1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 \\ 2c_1 = c_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 \\ 2c_1 - c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{4} \\ c_2 = \frac{1}{4} \\ c_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(1-t^2)(1+t)} = \frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4(1+t)} + \frac{1}{2(1+t)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)(1+t)} = -\frac{1}{4}\Big[\operatorname{Log}(1-t)\Big]_0^x$$

$$+ \frac{1}{4}\Big[\operatorname{Log}(1+t)\Big]_0^x$$

$$+ \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{(1+t)}\Big]_0^x$$

$$= \operatorname{Log}\sqrt[4]{\frac{1+t}{1-t}} - \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2}$$