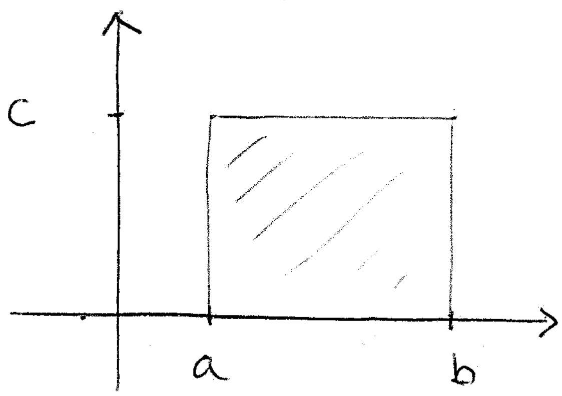
VI.2 Das Riemannsche Integral

In diesem Abschnitt wird der Integralbegriff auf eine möglichst grosse Klasse von Funktionen ausgedehnt. Insbesondere wir beweisen dass jede stetige Funktion auf einem offenen Intervall eine Stammfunktion besitzt

Ausgangspunkt: die geometrische Interpretation der Stammfunktion.

VI.2.1 Beispiele

i) $f \equiv c > 0$ Konstante

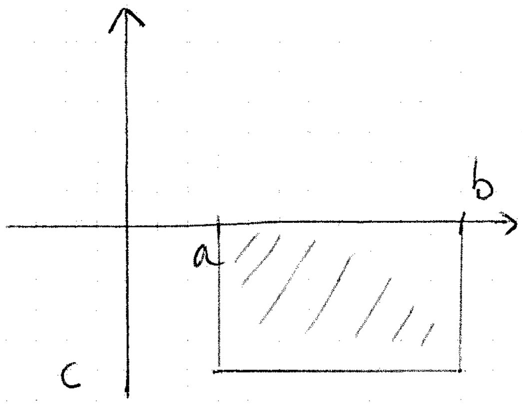


$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b c\,dt$$

$$= \big[c\,t\big]_a^b = c(b-a)$$

= Fläscheninhalt vom Rechtseck

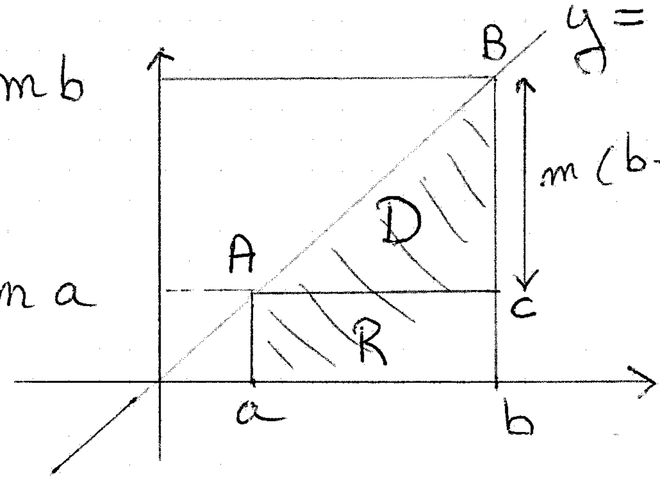
ii) Falls $c < 0$ $\quad f \equiv c$



$$\int_a^b f(t) = c\,(b-a)$$

$= -$ Fläscheninhalt

iii) $f(x) := m\,x$



Trapez $= D \cup R$

$$\int_a^b m\,t\,dt = \left[m\,\frac{t^2}{2} \right]_a^b = m\,\frac{b^2-a^2}{2}$$

$D =$ Dreieck ABC

$R =$ Rechtseck $A\,C\,(b,0)\,(a,0)$

Fläscheninhalt von dem Trapez

$$= \text{'' von } D + \text{'' von } R$$

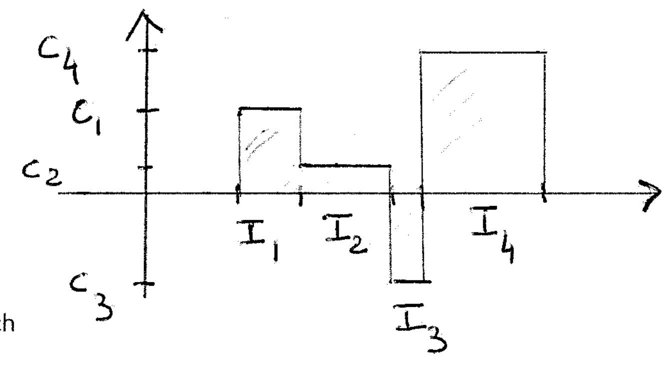
$$= \frac{1}{2} m(b-a)(b-a) + ma(b-a)$$

$$= m(b-a)\left[\frac{b}{2} - \frac{a}{2} + a\right] = m(b-a)\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

$$= \frac{m}{2}(b^2 - a^2) = \int_a^b mt\, dt$$

VI.2.2 Definition

i) Eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst Treppenfunktion falls für eine Zerlegung von $[a,b]$ in endliche viele disjunkte Teilintervalle $I_1, I_2 \ldots I_k$ es existiert $c_1, c_2 \ldots c_K \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = c_k$ auf I_k



$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{I_k}$$

wobei χ_{I_k} die charakteristische Funktion des Intervalles I_k notiert:

$$\chi_{I_k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in I_k \\ 0 & \text{falls } x \notin I_k \end{cases}$$

Seien $x_1 \dots x_{K+1}$ so dass $I_k = [x_k, x_{k+1})$

ii) Das R-Integral der Treppenfunktion f ist die folgende Zahl

$$\int_a^b f(t)\, dt := \sum_{k=1}^{K} c_k (x_{k+1} - x_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{K} c_k |I_k|$$

$|I_k|$ ist die Länge von I_k. $\square$

VI.2.3 Bemerkungen

i) Die konstante Funktionen sind

Treppenfunktionen

ii) Falls man die Zerlegungsintervalle I_k weiter in endliche viele Intervalle zerlegt ohne die Werte von f zu ändern dann wird das Integral von der neuen Treppenfunktion unmodifiziert.

VI.2.4 Lemma

Seien $e, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen mit

$$\forall x \in [a,b] \qquad e(x) \leq g(x) .$$

Dann gilt

$$\int_a^b e(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt \qquad \square$$

Beweis vom Lemma VI.2.4

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{K} I_k \qquad I_k \text{ disjunkte Intervalle}$$

$$[a,b] = \bigcup_{l=1}^{L} J_l \qquad J_l \text{ disjunkte Intervalle}$$

wobei
$$\begin{cases} e \equiv c_k \in \mathbb{R} & \text{auf } I_k \\ g \equiv d_l \in \mathbb{R} & \text{auf } J_l \end{cases}$$

Sei $I_{kl} := I_k \cap J_l$ (ist wiederum ein Intervall!)

$(I_{kl})_{\substack{k=1\dots K \\ l=1\dots L}}$ bildet eine feinere Zerlegung von $[a,b]$ als $(I_k)_{k=1\cdots K}$ oder als $(J_l)_{l=1\cdots L}$ auch.

(es wird nicht ausgeschlossen dass $I_{kl} = \phi$)

e ist wiederum eine Treppenfunktion für die neue feinere Zerlegung (I_{kl}) (sowohl auch g). Vorteil: e und g sind jetzt Treppenfunktionen für eine gemeinsame Zerlegung geworden:

$$e = \sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{I_k} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} c_k \chi_{I_{kl}}$$

$$g = \sum_{l=1}^{L} d_l \chi_{J_l} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} d_l \chi_{I_{kl}}$$

Die Voraussetzung $g \geq e \Rightarrow$

$$\forall k \in \{1 \cdots K\} \quad \forall l \in \{1 \cdots L\} \qquad c_k \leq d_l \quad \text{falls } I_{kl} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \int_a^b e(t)\,dt = \sum_{k=1}^{K} c_k |I_k|$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} c_k |I_{kl}|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} d_l |I_{kl}|$$

$$= \sum_{l=1}^{L} d_l |J_l| = \int_a^b g(t)\,dt$$

VI.2.5 Definition $-\infty < a < b < +\infty$

i) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt
(d. h. $\exists M \in \mathbb{R}_+$ mit $\forall x \in [a,b]$ $|f(x)| \leq M$)

Man definiert das <u>untere</u> Riemann Integral von f
(R-Integral)

$$\underline{\int_a^b} f(t)\,dt := \sup\left\{ \int_a^b e(t)\,dt\,;\ e\ \text{TF mit } e \leq f \text{ auf } [a,b] \right\}$$

und das obere Riemann Integral von f

$$\overline{\int_a^b} f(t)\,dt := \inf\left\{ \int_a^b g(t)\,dt\,;\ g\ \text{TF mit } f \leq g \text{ auf } [a,b] \right\}$$

VI.2.6 Beobachtung $\overline{\int} f$ und $\underline{\int} f$ sind

für eine beschränkte Funktione endliche Zahlen

Lemma VI.2.4 $\Rightarrow$

$$|b-a| \inf\{f(t);\, t\in[a,b]\} \leq \underline{\int_a^b} f(t)\,dt$$

$$\leq \overline{\int_a^b} f(t)\,dt \leq |b-a| \sup\{f(t)\,;\, t\in[a,b]\}$$

VI.2.7 Definition

Eine beschränkte Funktion heisst Riemann Integrabel falls

$$\underline{\int_a^b} f(t)\,dt = \overline{\int_a^b} f(t)\,dt$$

In diesem Fall man schreibt einfach

$$\int_a^b f(t)dt \quad \text{für} \quad \underline{\int_a^b} f(t)\,dt \quad \text{und für} \quad \overline{\int_a^b} f(t)dt$$

VI.2.8 Gegenbeispiel zu der R-Integrabilität

Sei $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ die Einschränkung der charakteristischen Funktion von den rationellen Zahlen auf der Strecke $[0,1]$

d. h.

$$\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}\cap[0,1] \end{cases}$$

Behauptung 1:

$$\underline{\int_0^1} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(t)\, dt \leq 0$$

Beweis der Behauptung 1:

Sei e eine TF mit $e(x) \leq \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$ $\forall x \in [0,1]$.

$$e = \sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{I_k}$$

wobei $(I_k)_{k=1\cdots K}$ eine Zerlegung von $[0,1]$ ist

Wir haben gesehen dass für $|I_k| \neq 0$

$$I_k \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$$

dann gilt $c_k \leq 0$ $\Rightarrow$ Behauptung 1

~~Für~~ Für Die Treppefunktion $e(t) \equiv 0$ auf $[0,1]$

gilt $e(t) \leq \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(t) \quad \forall t \in [0,1]$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \underline{\int_0^1} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(t)\, dt$$

Wir haben bewiesen dass

$$\underline{\int_0^1} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(t)\, dt = 0$$

In einer ähnlichen Weise man beweist

dass

$$\overline{\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(t)\, dt} = 1 > \underline{\int_0^1} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(t)\, dt$$

$\Rightarrow \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ist nicht R-Integrabel.

VI.2.9 Satz $-\infty < a < b < +\infty$

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone

Dann ist f über $[a,b]$ R-Integrabel

Beweis $\longrightarrow$ Skript

VI.2.10 Satz $-\infty < a < b < +\infty$

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

Dann ist f über $[a,b]$ R-Integrabel

Beweis von dem Satz VI.2.10

Sei $\varepsilon > 0$. Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen sind gleichmässig stetig.

Insbesondere $\exists\ \delta > 0$ s.d.

$$\forall x,y \in [a,b] \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Sei $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$

Sei $I_n^k := \left[a + \frac{k}{n}(b-a) \,;\, a + \frac{(k+1)}{n}(b-a) \right]$

Äquidistante Zerlegung

Seien $c_n^k := \mathrm{Min}\{ f(x) ; x \in I_n^k \}$

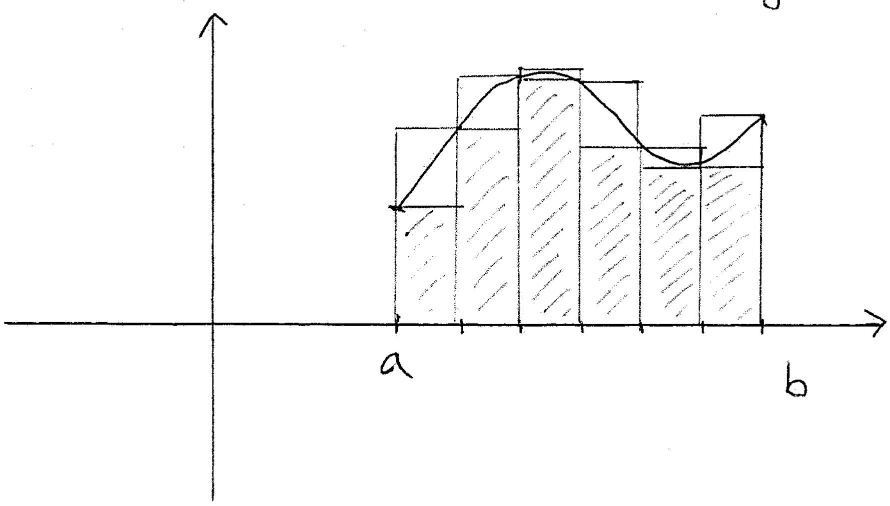
$$d_n^k := \mathrm{Max}\{ f(x) ; x \in I_n^k \}$$

Sei $e_n^k := \sum_{k=0}^{n-1} c_n^k \, \chi_{I_n^k}$

$$g_n^k := \sum_{k=0}^{n-1} d_n^k \, \chi_{I_n^k}$$

(*) e_n^k und g_n^k sind Treppenfunktionen

(**) $\forall x \in [a,b]$ $\quad e_n^k \leqslant f(x) \leqslant g_n^k$



$$(**) \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1} e_n^k(x) \, |I_n^k| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} g_n^k(x) \, |I_n^k|$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} e_n^k \, |I_n^k| \leq \underline{\int_a^b} f(t)dt \leq \overline{\int_a^b} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} g_n^k \, |I_n^k|$$

$$\Rightarrow \quad \left| \overline{\int_a^b} f(t)\,dt - \underline{\int_a^b} f(t)\,dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(d_n^k - c_n^k\right) \frac{b-a}{n}$$

Sei n so dass $\frac{b-a}{n} < \delta$

$$\Rightarrow \quad |d_n^k - c_n^k| = \left| \max_{x \in I_n^k} f(x) - \min_{x \in I_n^k} f(x) \right|$$

$$\leq \sup\left\{ |f(x) - f(y)| \; ; \; |x-y| \leq \frac{b-a}{n} \right\}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow \quad \left| \overline{\int_a^b} f(t)\,dt - \underline{\int_a^b} f(t)\,dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n}$$

$$= \varepsilon$$

Das gilt für alle $\varepsilon > 0$.

Dann bekommen wir $\overline{\int_a^b} f(t)dt = \underline{\int_a^b} f(t)dt$

$\Rightarrow$ f ist R-Integrabel

VI.2.11 Satz $\quad -\infty < a < b < +\infty$

Sei $f \in C^0([a,b])$ und

Sei $\bigcup_{k=0}^{K_n} I_n^k$ eine Folge von

Zerlegungen von $[a,b]$ mit

$$\delta_n := \text{Max}\{ |I_n^k| \, , \, k \in \{0 \ldots K_n\}\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Die Feinheit der Zerlegung

Sei $(x_n^k)_{k=0 \ldots K_n}$ $\quad x_n^k \in I_n^k$ beliebig

then

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{K_n} f(x_n^k)\, |I_n^k|}_{} = \int_a^b f(t)\, dt$$

So eine Summe heisst

"Riemann Summe"

$\square$

Beweis $\longrightarrow$ Skript

VI.2.12 Beispiele

i) $$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) := mx + b$$

$$I_n^k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \qquad x_n^k = \frac{k}{n}$$

$K_n = n - 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_n^k)\,|I_n^k| = \sum_{k=0}^{n-1}\left(m\,\frac{k}{n} + b\right)\frac{1}{n}$$

$$= \frac{m}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k + b = \frac{m}{n^2}\,\frac{n(n-1)}{2} + b$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_n^k)\,|I_n^k|$$
$$= \frac{m}{2} + b = \int_0^1 f(t)\,dt$$

ii) Wir studieren das Verhalten von

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^\alpha + k^\alpha} \quad \text{wobei } \alpha > 0 \quad \text{wenn } n \longrightarrow +\infty$$

Wir schreiben

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha}$$

Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad x_n^k = \frac{k}{n}$

$x \longmapsto \frac{1}{1+x^\alpha}$

$$I_n^k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow |I_n^k| = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f(x_n^k)\,|I_n^k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha}\frac{1}{n}$$

Satz VI.2.11

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} < +\infty$$

$$\neq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha} = \frac{n}{n^\alpha} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha}\frac{1}{n}}_{\downarrow \ \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha > 1 & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^\alpha+k^\alpha} = 0 \\ \alpha = 0 & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^\alpha+k^\alpha} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} \\ \alpha < 1 & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^\alpha+k^\alpha} = +\infty \end{cases}$$

VI. 3 Integrationsregeln Hauptsatz

VI. 3.1 Satz (Monotonie des R-Integrals)

f, g auf $[a, b]$ beschränkt und R-Integrabel

mit $f \leq g$ dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$$

Beweis vom Satz VI. 3.1

Sei e TF mit $e \leq f$ dann

gilt $e \leq g$. Das impliziert

$$\underline{\int_a^b} f(t)\,dt \ \sup\left\{ \int_a^b e(t)\,dt \ ; \ e \text{ TF } \ e \leq f \right\}$$

$$\leq \sup\left\{ \int_a^b e(t)\,dt \ ; \ e \text{ TF } \ e \leq g \right\}$$

$$= \underline{\int_a^b} g(t)\,dt$$

Aber $\int_a^b f(t)dt \ \underline{\int_a^b} f(t)\,dt$

$\int_a^b g(t)dt = \underline{\int_a^b} g(t)\,dt$ $\Big\} \Rightarrow$ Satz. $\square$

VI.3.2 Korollar

Sei $f \in C^0([a,b])$ dann gilt

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Beweis vom Korollar VI.3.2

$$\forall t \in [a,b] \quad -|f|(t) \leq f(t) \leq |f|(t)$$

$\square$

VI.3.3 Satz (Linearität)

Seien f, g beschränkt und R-Integrabel

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f + \beta g$ ist R-Integrabel

und es gilt

$$\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$$

VI.3.4 Satz $-\infty < a < b < +\infty$

Sei $f_k \in C^0([a,b])$ so dass

$$f_k \longrightarrow f \quad \text{gleichmässig auf } [a,b]$$

dann gilt $\int_a^b f_k(t)\,dt \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$ □

Beweis vom Satz VI.3.4

Sei $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall k \geqslant N$

$$\sup\left\{ |f_k(t) - f(t)| \,;\, t \in [a,b] \right\} < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Satz VI.3.3 +
Korollar VI.3.2 $\Rightarrow$

$$\left| \int_a^b f_k(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_a^b \left(f_k(t) - f(t) \right) dt \right| \leqslant \int_a^b |f_k(t) - f(t)|\,dt$$

$$\leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt = \varepsilon$$

Das impliziert

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$ □

VI.3.5 Satz (Anwendung zu Potenzreihen)

Sei $a_k \in \mathbb{C}$ so dass

$$0 < \rho = \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \leq \infty$$

$\forall x$ mit $|x| < \rho$ es gilt

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$\square$

Beweis vom Satz VI.3.5

Sei $r < \rho$. Wir haben bewiesen $\forall |t| \leq r$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

und die Konvergenz ist auf $[-r, r]$ gleichmässig

Korollar VI.3.4 $\Rightarrow$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^x \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \, dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \, dt$$

$$\int_0^x \sum_{k=0}^n a_k t^k \, dt \underset{\text{Satz VI.3.8}}{=} \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} \qquad \square$$

VI.3.6 Beispiel

$|t|<1$

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k t^k$$

$$\mathrm{Log}(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{k=0}^\infty (-1)^k t^k \, dt$$

$$= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

VI.3.7 Satz (Gebietsadditivität)

$f\ [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und R-Integrabel

und sei $x_0 \in (a,b)$ $\quad f$ ist auf $[a,x_0]$ und auf $[x_0,b]$

R-Integrabel

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^b f(t)\,dt$$

VI.3.8 Satz "Hauptsatz der Differential und Integralrechnung"

Sei $f \in C^0([a,b])$

Setze $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$

Dann gilt $F \in C^1((a,b))$ und $F' = f$

d.h. F bildet eine Stammfunktion für f □

Beweis vom Satz VI.3.8

Sei $x_0 \in (a,b)$ und Sei $\varepsilon > 0$ ~~sodass~~

Man sucht $\delta > 0$ so dass $\forall x \neq x_0$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

Man schreibt $F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt$

$$= \int_a^x f(t)\,dt + \int_{x_0}^a f(t)dt \underset{\text{gebietsadditivität}}{=} \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \left| F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0) \right|$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt - f(x_0)(x - x_0) \right|$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} \big(f(t) - f(x_0)\big)\, dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \left| f(t) - f(x_0) \right| dt \right|$$

Korollar $\underline{VI}$.3.2

Sei $\delta > 0$; $\forall\, x, y \in [a,b]$ $\quad |x - y| < \delta$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Dann $|x - x_0| < \delta$

$$\Rightarrow \left| \int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\, dt \right| \leq \varepsilon\, |x - x_0|$$

Also $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0) \right| < \varepsilon\, |x - x_0|$

$\Rightarrow$ Satz $\underline{VI}$.3.8.

VI.3.9 Übung

i) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$

Man schreibt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$I_n^k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \qquad f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\text{Satz VI.2.11} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

$$= \left[\operatorname{Log}(1+x)\right]_0^1 = \operatorname{Log} 2$$

ii) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^\alpha}{n^{\alpha+1}}$

Man schreibt

$$\alpha>0 \qquad \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{n} k^\alpha = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$$

$$f(x) = x^\alpha \text{ auf } [0,1] \qquad I_n^k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha = \int_0^1 f(t)\,dt = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$$