Lineare Algebra - Lösungen 1

1. (a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen sie, dass es Skalare $x, y \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\mathcal{F}_{a,b} = x\mathcal{F}_{1,\varphi} + y\mathcal{F}_{1,\psi}.$$

(Mit anderen Worten, schreiben Sie $\mathcal{F}_{a,b}$ als eine Linearkombination der beiden Eigenfolgen von S.)

(b) Finden Sie eine geschlossene Form fuer den $n$ten Wert der Fibonacci Folge $\mathcal{F}_{a,b}$.

Solution:

(a) Per Definition ist die Fibonacci-Folge $\mathcal{F}_{1,\varphi} = (a_0, a_1, \dots)$ durch die Anfangswerte

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

bestimmt. Gleiches gilt für die Fibonacci-Folge $\mathcal{F}_{1,\psi} = (b_0, b_1, \dots)$ und die Anfangswerte

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Um $\mathcal{F}_{a,b} = (c_0, c_1, \dots)$ als Linearkombination der beiden obigen Folgen zu schreiben müssen wir also x und y so wählen, dass die beiden Gleichungen

$$a = c_0 = xa_0 + yb_0 = x + y$$

und

$$b = c_1 = xa_1 + yb_1 = x\frac{1+\sqrt{5}}{2} + y\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

erfüllt sind.
Geschicktes umschreiben des letzten Terms und ersetzen von $(x+y)$ durch a liefert also das Gleichungssystem

$$a = x + y \tag{1}$$

$$b = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{\sqrt{5}}{2}(x-y) \Leftrightarrow \frac{2b-a}{\sqrt{5}} = x - y \tag{2}$$

in den Unbekannten x und y. Wir rechnen weiter und erhalten

$$(1)+(2) \quad \Leftrightarrow \quad a + \frac{2b-a}{\sqrt{5}} = 2x \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}a + \frac{1}{\sqrt{5}}b = x$$

$$(1)-(2) \quad \Leftrightarrow \quad a - \frac{2b-a}{\sqrt{5}} = 2y \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}a - \frac{1}{\sqrt{5}}b = y.$$

Somit sind

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\psi a + b)$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi a - b)$$

Lösungen für das Gleichungssystem. Da die Fibonacci-Folge $\mathcal{F}_{a,b}$ durch ihre beiden ersten Glieder c_0 und c_1 eindeutig bestimmt ist folgt mit dieser Wahl von x und y, das

$$\mathcal{F}_{a,b} = x\mathcal{F}_{1,\varphi} + y\mathcal{F}_{1,\psi}$$

gilt.

(b) Für $n \geq 2$ ist der $n$te Term der Fibonacci-Folge $\mathcal{F}_{a,b}$ gegeben durch

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}.$$

Diese Form ist jedoch noch nicht geschlossen, da c_n von seinen Vorgängern c_{n-1} und c_{n-2} abhängt. Eine geschlossene Form darf nur von n, a und b abhängen.
Daher verwenden wir unser Wissen aus dem vorherigen Aufgabenteil sowie der Tatsache, dass $\mathcal{F}_{1,\varphi}$ und $\mathcal{F}_{1,\psi}$ Eigenfolgen für die Verschiebungs-Abbildung S, mit den Eigenwerten φ bezieungsweise ψ, sind. Aus der Vorlesung kennen wir die geschlossene Form

$$\mathcal{F}_{1,\varphi} = (1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, ...)$$
$$\mathcal{F}_{1,\psi} = (1, \psi, \psi^2, \psi^3, \psi^4, ...)$$

der beiden Eigenfolgen. Somit gilt für $n \geq 1$

$$c_n = x\varphi^n + y\psi^n = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\psi a + b)\varphi^n + \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi a - b)\psi^n$$

Da $\psi\varphi = -1$ gilt, folgt also

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a(\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}) + b(\varphi^n - \psi^n)).$$

Beachte, dass diese Formel insbesondere auch für $n = 0$ stimmt.

2. Eine Folge $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ ist eine *Pell-Folge* wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt so dass

$$c_0 = a, \quad c_1 = b, \quad c_n = 2c_{n-1} + c_{n-2};$$

wir nennen diese Folge $\mathcal{P}_{a,b}$. Es sei V die Menge aller Pell-Folgen.

(a) Es seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ Pell-Folgen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ und $\alpha\mathcal{Q}$ ebenfalls Pell-Folgen sind.

(b) Es sei $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ eine Pell-Folge. Zeigen Sie, dass die Folge $(c_1, c_2, c_3, \dots)$ ebenfalls eine Pell-Folge ist.

(c) Es sei $S : V \to V$ der Verschiebungsoperator, der die Folge $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ auf $(c_1, c_2, c_3, \dots)$ abbildet. Bestimmen Sie die Eigenfolgen von S in V mit den dazugehoerigen Eigenwerten.

(d) Schreiben Sie $\mathcal{P}_{a,b}$ als eine Linearkombination der beiden Eigenfolgen.

(e) Finden Sie eine geschlossene Form fuer den $n$ten Wert von $\mathcal{P}_{a,b}$.

(f) $(\star)$ Was geht schief, wenn wir statt dessen die Folgen $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ betrachten, die ueber die Rekursion

$$c_0 = a, \quad c_1 = b \quad c_n = 2c_{n-1} - c_{n-2}$$

definiert sind?

Die Frage $(\star)$ ist eine schwierigere Zusatzfrage. Sie sollten sie nur dann in Angriff nehmen, wenn Sie die anderen Fragen geloest haben.

Solution:

(a) Seien $\mathcal{P} = (c_0, c_1, \dots)$ und $\mathcal{Q} = (d_0, d_1, \dots)$, dann gelten für

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = (e_0, e_1, \dots),$$

die Gleichungen

$$e_0 = c_0 + d_0, \quad e_1 = c_1 + d_1,$$

sowie

$$\begin{aligned} e_n = c_n + d_n &= (2c_{n-1} + c_{n-2}) + (2d_{n-1} + d_{n-2}) \\ &= 2(c_{n-1} + d_{n-1}) + (c_{n-2} + d_{n-2}) = 2e_{n-1} + e_{n-2}. \end{aligned}$$

Also ist auch $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ eine Pell-Folge.
Für $\alpha\mathcal{Q} = (f_0, f_1, \dots)$ gilt

$$\begin{aligned} &f_0 = \alpha d_0, \quad f_1 = \alpha d_1, \\ &f_n = \alpha d_n = \alpha(2d_{n-1} + d_{n-2}) = 2\alpha d_{n-1} + \alpha d_{n-2} = 2f_{n-1} + f_{n-2}, \end{aligned}$$

somit ist auch $\alpha\mathcal{Q}$ eine Pell-Folge.

(b) Für $n \geq 0$ sei $d_n = c_{n+1}$. Wir müssen zeigen, dass $(d_0, d_1, d_2, \dots)$ eine Pell-Folge ist. Für $n \geq 2$ gilt

$$d_n = c_{n+1} = 2c_n + c_{n-1} = 2d_{n-1} + d_{n-2}.$$

Somit erfüllt die Folge $(d_0, d_1, d_2, \dots)$ die Gleichung, welche Pell-Folgen charakterisiert.

(c) Gesucht sind die Eigenfolgen für den Verschiebungs-Operator $S\colon V \to V$. Angenommen, die Pell-Folge $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ ist eine Eigenfolge mit Eigenwert α. Dann gilt

$$(c_1, c_2, c_3, \dots) = S(c_0, c_1, c_2, \dots) = (\alpha \cdot c_0, \alpha \cdot c_1, \alpha \cdot c_2, \dots),$$

das heisst $c_n = \alpha c_{n-1}$ gilt für alle $n \geq 1$. Da $(c_0, c_1, \dots)$ eine Pell-Folge ist gilt die Gleichung

$$c_2 = 2c_1 + c_0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 c_0 = 2\alpha c_0 + c_0. \tag{3}$$

Falls $c_0 = 0$, so ist auch $c_1 = \alpha c_0 = 0$ und somit wäre $(c_0, c_1, \dots) = \mathcal{P}_{0,0}$ die Null-Folge. Da wir aber eine Eigenfolge suchen, und Eigenfolgen per Definition nie Null-Folgen sind, kann das nicht der Fall sein. Somit gilt $c_0 \neq 0$ und wir können in (3) durch c_0 dividieren und erhalten

$$\alpha^2 = 2\alpha + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ und $\delta = 1 - \sqrt{2}$.
Also ist die Eigenfolge $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ entweder

$$c_0 \cdot (1, \gamma, \gamma^2, \dots),$$

oder

$$c_0 \cdot (1, \delta, \delta^2, \dots).$$

(d) Gesucht sind $x, y \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mathcal{P}_{a,b} = x\mathcal{P}_{1,\gamma} + y\mathcal{P}_{1,\delta}$$

gilt. Analog wie in der ersten Aufgabe führt dies zu dem Gleichungssystem

$$a = x + y \tag{4}$$
$$b = x\gamma + y\delta = (x + y) + \sqrt{2}(x - y). \tag{5}$$

Auflösen nach den Unbekannten x und y liefert

$$x = \frac{1}{2}(a + \frac{b - a}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\delta a + b)$$
$$y = \frac{1}{2}(a - \frac{b - a}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma a - b).$$

Wir erhalten das Ergebnis

$$\mathcal{P}_{a,b} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\delta a + b)\mathcal{P}_{1,\gamma} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma a - b)\mathcal{P}_{1,\delta}.$$

(e) Den geschlossenen Wert für den $n$ten Term der Folge $\mathcal{P}_{a,b} = (c_0, c_1, c_2, \dots)$ erhalten wir wieder durch die geschlossenen Terme der Folgenglieder der beiden Eigenfolgen $\mathcal{P}_{1,\gamma}$ und $\mathcal{P}_{1,\delta}$, sowie der Linearkombination aus der vorherigen Aufgabe. Nämlich

$$c_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\delta a + b)\gamma^n + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma a - b)\delta^n.$$

Wir beachten, dass $\gamma\delta = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$ gilt und folgern daraus die geschlossene Form

$$c_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(a(\gamma^{n-1} - \delta^{n-1}) + b(\gamma^n - \delta^n)).$$

(f) Falls die Rekursion durch

$$c_n = 2c_{n-1} + c_{n-2}$$

gegeben ist, und wir eine Eigenfolge für den Verschiebungsoperator finden wollen, führen dieselben Argumente wie vorhin zu der quadratischen Gleichung

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0.$$

Dieses Polynom hat aber mit 1 eine doppelte Nullstelle. Somit gibt es zwar eine Eigenfolge, jedoch können wir nicht jede andere Folge durch eine Linearkombination mit Eigenfolgen darstellen, da wir so nur die konstanten Folgen

$$c \cdot (1, 1, 1, \dots)$$

erreichen könnten. Die Folge

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots),$$

die durch die Startwerte $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ gegeben ist, erfüllt zwar die Rekursion, ist aber nicht konstant und somit insbesondere kein Vielfaches der konstanten Eigenfolge

$$(1, 1, 1, \dots)$$

des Verschiebungsoperators.