Lineare Algebra - Lösungen 3

1. Es seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Entscheiden Sie fuer jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist, und geben Sie einen Beweis oder Gegenbeispiel.
   (a) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$;
   (b) if $AB = 0$, dann gilt $A = 0$ oder $B = 0$.
   (c) wenn $AB = 0$, dann koennen A und B nicht beide invertierbar sein.
   (d) wenn A und B invertierbar sind, dann gilt das Gleiche fuer $A - B$.

   Hinweis: Gegenbeispiele lassen sich oft schon für $n = 2$ finden.

Solution:

(a) Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch. Beachten Sie, dass

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

gilt. Dementsprechend ist die Gleichung nur dann erfüllt, falls

$$AB = BA$$

für die Matrizen A und B gilt. Also genau dann, wenn A und B kommutieren.
Ein Gegenbeispiel wäre $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Wir sehen

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Auch diese Aussage ist nicht wahr. Wir beachten, dass zum Beispiel für $A = B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gilt, dass

$$AB = A^2 = 0.$$

Insbesondere gibt es also Matrizen, die nicht die Nullmatrix sind, deren Quadrat 0 ist - im Gegensatz zu den rellen Zahlen, in denen jedes Quadrat einer Zahl ungleich 0 positiv ist.

(c) Diese Aussage ist wahr. Angenommen A sei invertierbar. Dann gibt es eine Matrix A^{-1}, sodass

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}_n$$

gilt. Wir erhalten

$$B = \mathbf{1}_n B = A^{-1}AB = A^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Die Nullmatrix ist aber sicherlich nicht invertierbar, daher folgt

$$A \text{ invertierbar} \Rightarrow B \text{ nicht invertierbar.}$$

Eine ähnliche Argumentation liefert

$$B \text{ invertierbar} \Rightarrow A \text{ nicht invertierbar}.$$

(d) Nein, diese Aussage ist auch falsch. Angenommen A sei eine invertierbare Matrix. Dann ist für $A = B$ die Differenz

$$A - B = 0$$

sicher nicht invertierbar. Das liefert also schon eine unendliche Anzahl an Gegenbeispielen.

Für ein konkretes (und zudem anderes) Beispiel betrachten wir die Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Die Differenz ist

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun folgt aus Teil (b) und (c), dass $A - B$ nicht invertierbar sein kann. (Warum?)

2. Bestimmen Sie für welche Werte von $A \in \mathbb{R}$ und $B \in \mathbb{R}$ das folgende Gleichungssystem in den Variablen $x, y, z \in \mathbb{R}$ lösbar ist.

$$\begin{aligned} 1x + 2y - 3z &= 14 \\ 3x + 7y - 9z &= 47 \\ -3x - 5y + Az &= B \\ 2x + 4y - 3z &= 29. \end{aligned}$$

Geben Sie für Ihre gefundenen Werte von A und B alle Lösungen an.

Solution: Um das Beispiel zu lösen schreiben wir das Gleichungssystem zuallererst in Matrixschreibweise als

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 3 & 7 & -9 & 47 \\ -3 & -5 & A & B \\ 2 & 4 & -3 & 29 \end{array}\right).$$

Nun bringen wir die Matrix mittels EZU in eine reduzierte Zeilenform

$$
\begin{aligned}
S(1,2,-3) &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & A & B \\ 2 & 4 & -3 & 29 \end{array}\right), \\
S(1,3,3) &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & A-9 & B+42 \\ 2 & 4 & -3 & 29 \end{array}\right), \\
S(1,4,-2) &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & A-9 & B+42 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right), \\
S(2,1,-2) &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & A-9 & B+42 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right), \\
S(2,3,-1) &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & A-9 & B+37 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right), \\
S(4,1,1) &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & A-9 & B+37 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right), \\
S(4,3,3) &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & A & B+40 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

Damit dieses Gleichungssystem also lösbar ist, müssen $x = 5$ und $y = 5$ gelten. Ausserdem muss z die beiden folgenden Gleichungen erfüllen

$$
\begin{aligned}
Az &= B + 40 \\
3z &= 1.
\end{aligned}
$$

Also folgt $z = \frac{1}{3}$ und wir erhalten

$$\frac{A}{3} = B + 40.$$

Solange A und B also die Gleichung $A = 3B + 120$ erfüllen, ist $(x, y, z) = (5, 5, \frac{1}{3})$ die (einzige)

Lösung des Gleichungssystems. Falls A und B die Gleichung $A = 3B + 120$ nicht erfüllen, hat das Gleichungssystem somit keine Lösung.

3. (a) Es sei A eine $(m \times n)$-Matrix mit $m \geq 3$. Finden sie für die folgenden EZUs eine passende $(m \times m)$-Matrix E, um die EZU auf A auch als Matrixmultiplikation $E \cdot A$ schreiben zu können:
   1. $P(2,3)$
   2. $M(1,5)$
   3. $S(1,2,3)$

   (b) Wenden Sie elementare Zeilenumformungen auf die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

an, sodass die resultierende Matrix R auf der linken Seite die 3×3-Einheitsmatrix enthält. Geben Sie explizit eine invertierbare Matrix W an, sodass gilt

$$W \cdot A = R.$$

Berechnen Sie auch W^{-1}.

Hinweis: Um W und W^{-1} zu finden, ist der erste Teil der Aufgabe sehr hilfreich.

Solution:

(a) 1. $P(2,3)$: Das Vertauschen der 2-ten und 3-ten Zeile der Matrix A können wir auch also Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

schreiben.

2. $M(1,5)$: Die Multiplikation der 1-ten Zeile der Matrix A mit 5 können wir auch also Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

schreiben.

3. $S(1,2,3)$: Das Addieren des 3-fachen der 1-ten Zeile zur 2-ten Zeile der Matrix A können wir auch also Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

schreiben.

(b) Wir wenden EZU auf A wie folgt an:

$$S(1,2,1) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S(1,3,-1) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M(3,-\tfrac{1}{4}) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$S(3,2,-2) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$S(3,1,-2) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$M(2,\tfrac{1}{4}) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$S(2,1,-1) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$P(2,3) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{pmatrix} = R.$$

Um W zu bestimmen müssen wir uns nun nur überlegen welche EZU wir durchgeführt haben, und welcher Multiplikation einer Matrix dies entspricht. Das Produkt der entsprechenden acht (3×3)-Matrizen ist

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \cdots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Um W^{-1} zu berechnen stellen wir uns die Frage, welche EZUs die Matrix R in die Matrix A umformen - dazu müssen wir aber genau die acht obigen EZU rückgängig machen! Das bedeutet W^{-1} ist das umgekehrte Produkt der inversen der acht (3×3)-Matrizen der obigen EZU. Wir erhalten

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \cdots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Finde für eine algemeine EZU (also. $S(r, s, \lambda)$, $M(r, \lambda)$ oder $P(r, s)$) eine EZU, die diese rückgängig macht!)

4. Bestimmen Sie alle Matrizen $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft, dass die Summe aller Elemente jeder Zeile, jeder Spalte und beider Diagonalen einen vorgegebenen Wert $c \in \mathbb{R}$ annimmt.
Welchen Wert nimmt insbesondere die Zahl a_{22} an?
Ergänzen Sie nun mit dem erlangten Wissen die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 16 & a_{13} \\ 24 & 30 & 36 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

so, dass sie den obigen Bedingungen genügt.

Hinweis: Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und verwenden Sie EZU um die Lösungen zu finden.

Solution: Wir suchen also eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

die die Gleichungen

$$\begin{aligned} &a_{11} + a_{21} + a_{31} = a_{12} + a_{22} + a_{32} = a_{13} + a_{23} + a_{33} = \\ &a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33} = \\ &a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{13} + a_{22} + a_{31} = c \end{aligned}$$

erfüllt. Das sind insgesamt acht Gleichungen für die neun Unbekannten

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}.$$

Wir schreiben diese in Matrixform wie folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2c}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2c}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -\frac{c}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -\frac{2c}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & \frac{4c}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei wir die Matrix mit EZU in reduzierte Zeilenform gebracht haben. Aufgrund der 5-ten Zeile sehen wir, dass für eine Lösung zwangsweise $a_{22} = \frac{c}{3}$ gelten muss. Des Weiteren können wir die anderen 6 nicht-trivialen Zeilen als Gleichungen wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{33} &= \tfrac{2c}{3} \\ a_{12} + a_{32} &= \tfrac{2c}{3} \\ a_{13} - a_{32} - a_{33} &= -\tfrac{c}{3} \\ a_{21} - a_{32} - 2a_{33} &= -\tfrac{2c}{3} \\ a_{23} + a_{32} + 2a_{33} &= \tfrac{4c}{3} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} &= c. \end{aligned}$$

Insbesondere fällt uns auf, dass wir die ersten 7 Variablen $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}$ als Summe von Vielfachen der Werte c, a_{32} und a_{33} schreiben können. Wir setzen $a_{32} = \lambda$ und $a_{33} = \mu$ und erhalten dann

$$\begin{aligned} a_{11} &= \tfrac{2c}{3} - \mu \\ a_{12} &= \tfrac{2c}{3} - \lambda \\ a_{13} &= -\tfrac{c}{3} + \lambda + \mu \\ a_{21} &= -\tfrac{2c}{3} + \lambda + 2\mu \\ a_{22} &= \tfrac{c}{3} \\ a_{23} &= \tfrac{4c}{3} - \lambda - 2\mu \\ a_{31} &= c - \lambda - \mu. \end{aligned}$$

In Matrixform erhalten wir für A den Ausdruck

$$A = \frac{c}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen bereits, dass $a_{22} = \frac{1}{3}c$ eindeutig durch c festgelegt ist. Für das konkrete Beispiel ist also $c = 90$ und somit $a_{12} = 16 = 60 - \lambda$ und $a_{21} = 24 = -60 + \lambda + 2\mu$. Es folgt $\lambda = 44$, $\mu = 20$, was schliesslich zu

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 16 & 34 \\ 24 & 30 & 36 \\ 26 & 44 & 20 \end{pmatrix}$$

führt.