Lineare Algebra - Lösungen 7

1. Berechnen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung von $\mathbb{R}^4$ nach $\mathbb{R}^3$ definiert durch Linksmultiplikation mit
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution: Eine Basis des Kerns ist gegeben durch
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$
und eine Basis des Bildes ist gegeben durch
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Seien U, V, W beliebige Vektorräume. Beweisen Sie folgende Ungleichungen:
   (a) Für beliebige lineare Abbildungen $f, g\colon U \to V$ gilt
   $$\mathrm{rk}(f+g) \;\leq\; \mathrm{rk}(f) + \mathrm{rk}(g).$$
   (b) Für beliebige lineare Abbildungen $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to W$ gilt
   $$\mathrm{rk}(g \circ f) \;\leq\; \min\left\{ \mathrm{rk}(f), \mathrm{rk}(g) \right\}.$$
   (c) Formulieren und beweisen Sie analoge Eigenschaften für Matrizen.

Solution:

(a) Es gilt
$$\mathrm{im}(f+g) \subset \mathrm{im}(f) + \mathrm{im}(g),$$
denn für alle $u \in U$ ist $(f+g)(u) = f(u) + g(u) \in \mathrm{im}(f) + \mathrm{im}(g)$, woraus folgt
$$\mathrm{rk}(f+g) = \dim \mathrm{im}(f+g) \leq \dim \mathrm{im}(f) + \dim \mathrm{im}(g) = \mathrm{rk}(f) + \mathrm{rk}(g)\,.$$

(b) Wegen $\mathrm{im}(g \circ f) \subset \mathrm{im}(g)$, gilt sicherlich $\mathrm{rk}(g \circ f) \leq \mathrm{rk}(g)$.
Da die Abbildung
$$g|_{\mathrm{im}(f)} : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{im}(g \circ f)$$

linear und surjektiv ist, gilt zudem aufgrund der Dimensionsformel

$$\dim \operatorname{im}(g \circ f) = \dim \operatorname{im}(f) - \dim \ker(g|_{\operatorname{im}(f)}) \leq \dim \operatorname{im}(f)$$

und damit auch die Gesamtaussage.

(c) Da der Rang der $n \times m$-Matrix A gleich dem Rang der linearen Abbildung $T_A : K^m \to K^n, v \mapsto T_A v$ ist, folgt:

(i) Für beliebige $n \times m$ Matrizen A und B gilt:

$$\operatorname{rk}(A + B) \leq \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(B)\,.$$

(ii) Für jede $m \times n$ Matrix A und jede $n \times r$ Matrix B gilt:

$$\operatorname{rk}(AB) \leq \min(\operatorname{rk}(A), \operatorname{rk}(B))\,.$$

3. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ und

$$T \in \operatorname{Hom}(V, W) := \{f : V \to W \mid f \text{ ist eine } \mathbb{K}\text{-lineare Abbilung}\}.$$

(a) Beweisen Sie

(i) Für jeden Untervektorraum $W' \subset W$ ist das Urbild

$$T^{-1}(W') := \{v \in V \mid T(v) \in W'\}$$

ein Unterraum von V.

(ii) Das Bild von T

$$\operatorname{im}(T) := \{T(v) \in W \mid v \in V\}$$

ist ein Unterraum von W.

(iii) Es gilt

$$\dim(T^{-1}(W')) = \dim T^{-1}(0) + \dim(\operatorname{im}(T) \cap W')\,.$$

(b) Beweisen Sie

(i) T ist genau dann injektiv, wenn T eine lineare Linksinverse besitzt, d.h. es gibt $S \in \operatorname{Hom}(W, V)$ so dass $S \circ T = \operatorname{id}_V$.

(ii) T ist genau dann surjektiv, wenn T eine lineare Rechtsinverse besitzt, d.h. es gibt $S \in \operatorname{Hom}(W, V)$ so dass $T \circ S = \operatorname{id}_W$.

(c) Finden Sie Beispiele für Abbildungen T und S wie in $(b.i)$ und $(b.ii)$, die jedoch nicht invertierbar sind.

Solution:

(a) Sei $V' := T^{-1}(W')$. Per Definition gilt $\ker(T) = T^{-1}(0)$.

(i) Wir müssen zeigen, dass V' nicht leer ist und dass für beliebige Elemente $x, y \in V'$ und beliebige $\alpha \in K$ die Summe $x + y$ und das Produkt αx wieder in V' liegen.

Wegen $T(0) = 0 \in W'$ liegt 0 in V' und V' ist nicht leer. Da f linear ist, gilt

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \text{und} \quad T(\alpha x) = \alpha T(x)\,.$$

Wegen $T(x)$, $T(y) \in W'$ folgt aus den Unterraumaxiomen, dass auch $T(x) + T(y)$ und $\alpha T(x)$ wieder in W' liegen. Somit liegen $x + y$ und αx wieder in V'.

(ii) Das ist ein Lemma aus der Vorlesung. Da $T(0_V) +)_W$, sehen wir, dass $0_W \in \mathrm{im}(T)$. Es seien nun w_1 und w_2 in $\mathrm{im}(T)$; dann gibt es v_1 und v_2 in V, sodass $T(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2$ gilt. Es sei nun $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$w_1 + \lambda w_2 = T(v_1) + \lambda T(w_2) = T(v_1 + \lambda v_2),$$

das heisst $w_1 + \lambda w_2 \in \mathrm{im}(T)$.

(iii) Aus der Definition von V' folgt, dass wir eine wohldefinierte Abbildung

$$T' \colon V' \to W',\ v' \mapsto T'(v') := T(v)$$

haben. Man prüft direkt, dass T' eine lineare Abbildung ist. Es folgt

$$\dim(V') = \dim(\ker(T')) + \dim(\mathrm{im}(T')). \tag{1}$$

Da $0_W \in W'$ ist, gilt $\ker(T) \subseteq V'$. Durch Einsetzen der Definition erhält man

$$\ker(T') = \ker(T).$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(T') &= \{w \in W' \mid \exists v \in V' : T'(v) = w\} \\
&= \{w \in W' \mid \exists v \in V : T(v) = w\} \\
&= \{w \in W \mid \exists v \in V : T(v) = w \text{ und } w \in W'\} \\
&= \mathrm{im}(T) \cap W'\,.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (1) erhält man

$$\dim(V') = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{im}(T) \cap W')\,.$$

Aliter: Man kann auch den Beweis der Vorlesung wiederholen, mit einer Basis B' von $\ker(T)$ beginnen, diese zu einer Basis B von $T^{-1}(W')$ erweitern und zeigen, dass T das Komplement $B \setminus B'$ bijektiv auf eine Basis von W' abbildet.

(b) (i) Ist $S \circ T =_V$, so ist $S \circ T$ injektiv und folglich auch T injektiv. Dies zeigt die Implikation "$\Leftarrow$".

Sei umgekehrt T injektiv. Dann ist mit $W_1 := \mathrm{im}(T)$ die Abbildung

$$T\colon V \to W_1$$

bijektiv und linear, also ein Isomorphismus (siehe Vorlesung). Sei $S_1\colon W_1 \to V$ die Umkehrabbildung. Wähle ein Komplement W_2 zu W_1 in W und definiere die Abbildung

$$S\colon W \to V$$

durch $S(w_1 + w_2) := S_1(w_1)$ für alle $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$. Wegen $W = W_1 \oplus W_2$ ist S wohldefiniert und man prüft direkt, dass S linear ist. Für alle $v \in V$ ist weiter $T(v) \in W_1$ und somit

$$S \circ T(v) = S|_{W_1}(T(v)) = S_1(T(v)) = v$$

also ist $S \circ T =_V$. Dies zeigt die Implikation "$\Rightarrow$".

(ii) Ist $T \circ S = \mathrm{id}_W$, so ist $w = \mathrm{id}_W(w) = T(S(w))$ für jedes $w \in W$, die Abbildung T also surjektiv. Dies zeigt die Implikation "$\Leftarrow$".

Sei umgekehrt T surjektiv. Sei V_2 ein Komplement von $V_1 := \ker(T)$ in V und betrachte die Abbildung

$$T_2 := T|_{V_2}\colon V_2 \to W.$$

Dann ist $\ker(T_2) = \ker(T) \cap V_2 = V_1 \cap V_2 = 0$ und somit T_2 injektiv. Nach Voraussetzung existiert für jedes $w \in W$ ein $v \in V$ mit $T(v) = w$. Schreiben wir $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$, so folgt $T(v) = T(v_2) = w$. Daher ist T_2 auch surjektiv und damit ein Isomorphismus von V_2 nach W.

Sei $S_2\colon W \to V_2$ die Umkehrabbildung von T_2 und sei S die Komposition von S_2 mit der Inklusionsabbildung $V_2 \hookrightarrow V$. Da S_2 und die Inklusionsabbildung linear sind, ist S linear. Für alle $w \in W$ ist $S(w) \in V_2$ und es gilt

$$T(S(w)) = T|_{V_2}(S(w)) = T_2(S_2(w)) = w\,,$$

also ist $T \circ S = \mathrm{id}_W$. Dies zeigt die Implikation "$\Rightarrow$".

(c) Zum Beispiel ist die Abbildung $T_{(i)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ linear und injektiv, allerdings nicht invertierbar.

Die Abbildung $T_{(ii)}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist linear und surjektiv, aber nicht invertierbar.

Beachte jedoch, dass $T_{(ii)} \circ T_{(i)} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ gilt.

4. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $(x, y) \mapsto (x - 2y, -2x + 4y, 3x - 6y)$. Finden Sie Basen von

$\mathbb{R}^2$ und von $\mathbb{R}^3$, bezüglich welcher die Matrix $A = (a_{ij})$ von f die Form

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

annimmt.

Solution: Wir beobachten zuerst dass $\ker(f) = \mathbb{R} \cdot (2,1)$ und $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R} \cdot (1,-2,3)$ gilt. Der Kern von f wird also durch den Vektor $v_2 = (2,1)$ erzeugt, und wir ergänzen diesen mit dem Vektor $v_1 = (1,0)$ zu einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$.
Des Weiteren, ergänzen wir den Vektor $w_1 = (1,-2,3)$, mit $w_2 = (1,0,0)$ und $w_3 = (0,1,0)$ zu einer Basis $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_2\}$ von $\mathbb{R}^3$.

Dann hat die Darstellungsmatrix von f bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ die gewünschte Form:

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Betrachten Sie den Endomorphismus $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch Linksmultiplikation mit der Matrix A, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

   (a) Zeigen Sie, dass $T_A^2 := T_A \circ T_A \neq 0$, aber $T_A^3 := T_A^2 \circ T_A = 0$.

   (b) Finden Sie eine Basis $\{u, v, w\}$ von $\mathbb{R}^3$ mit $T_A(u) = 0$, $T_A(v) = u$, $T_A(w) = v$ und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $[T_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ bezüglich $\mathcal{B} := (u, v, w)$.

Solution:

(a) Zunächst berechnen wir die Abbildungsmatrix von T_A^2 bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$. Es gilt

$$T_A^2(e_1) = T_A\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T_A^2(e_2) = T_A\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$T_A^2(e_3) = T_A\left(\begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend ist

$$[T_A^2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

ungleich der Nullabbildung.
Wir berechnen die Abbildungsmatrix von T_A^3 bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$. Es gilt

$$T_A^3(e_1) = T_A^2\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_A^3(e_2) = T_A^2\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_A^3(e_3) = T_A^2\left(\begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $T_A^3 = 0$.

(b) Seien $w := e_1$, $v := T_A(w)$ und $u := T_A(v)$. Wir müssen zeigen, dass $\{u, v, w\}$ linear unabhängig und somit eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Seien $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ und

$$0 = \lambda w + \mu v + \nu u = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu + 6\nu \\ \mu + 4\nu \\ 2\nu \end{pmatrix}$$

dann folgt $\lambda = \mu = \nu = 0$ und folglich ist $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ Es ist (wie bereits oben berechnet)

$$T_A(u) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wie gewünscht.

Es gilt (siehe oben)

$$\begin{aligned} T_A(u) &= 0 = 0u + 0v + 0w \\ T_A(v) &= u = 1u + 0v + 0w \\ T_A(w) &= v = 0u + 1v + 0w \end{aligned}$$

und folglich

$$[T_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Seien lineare Abbildungen $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}.$$

Sei weiterhin

$$a := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

sei b die standard Basis des $\mathbb{R}^2$ und sei

$$c := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Zeigen Sie, dass a eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und c eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie $g \circ f$ und die Matrixdarstellungen von

  (i) f bezüglich der Basen a, b.

  (ii) g bezüglich der Basen b, c.

  (iii) $g \circ f$ bezüglich der Basen a, c.

Solution:

(a) Man überprüft durch Umformung in reduzierte Zeilenstufenform, dass die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

aus linear unabhängigen Spalten bestehen. Dies zeigt, dass a eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und c eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Die Abbildungen f und g sind durch Linksmultiplikation mit einer Matrix darstellbar, nämlich $f = T_D$ und $g = T_E$ für

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $g \circ f = T_E \circ T_D = T_{ED}$ für die Matrix

$$ED = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen D, E, ED sind gleichzeitig die Abbildungsmatrizen von $f, g, g \circ f$ bezüglich der jeweiligen Standardbasen $\mathcal{B}_n := \{e_1, \dots, e_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ (für $n = 2, 3, 4$), das heisst, es gilt

$$D = [f]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_4}, \quad E = [g]_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_2} \quad \text{und} \quad ED = [g \circ f]_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_4}.$$

Um jedoch herauszufinden wie die Abbildungsmatrizen von f, g und $g \circ f$ bezüglich der Basen a, b, b, c beziehungsweise a, c aussehen, müssen wir die entsprechenden Abbildungen auf die Ausgangsbasis anwenden.
Die Matrix A ist jedoch genau die Abbildungsmatrix derjenigen Abbildung h, welche die Basis a mit Hilfe der Standardbasis $\mathcal{B}_4$ ausdrückt, das heisst $A = [h]_{\mathcal{B}_4}^{a}$ und die Matrix C ist genau die Abbildungsmatrix derjenigen Abbildung h', welche die Basis c mit Hilfe der Standardbasis $\mathcal{B}_3$ ausdrückt, das heisst $C = [h']_{\mathcal{B}_2}^{c}$. Dementsprechend ist C^{-1} die Abbildungsmatrix jener Abbildung h'', welche die Basis Standardbasis $\mathcal{B}_3$ mit Hilfe der Basis c ausdrückt. Eine Rechnung liefert

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basen a und $b = \mathcal{B}_2$ ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} [f]_b^a &= [f]_b^{\mathcal{B}_4} \cdot [h_a]_{\mathcal{B}_4}^a \\ &= D \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 11 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Für g ist die Matrixdarstellung bezüglich der Basen $b = \mathcal{B}_2$ und c gleich

$$\begin{aligned} [g]_c^b &= [h'']_c^{\mathcal{B}_3} [g]_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_2} \\ &= C^{-1} \cdot E \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) Die Matrixdarstellung von $g \circ f$ bezüglich der Basen a und c ist dann

$$\begin{aligned} [g \circ f]_c^a = [g]_c^b \cdot [f]_b^a &= C^{-1} \cdot E \cdot D \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -10 & -4 & -7 \\ -2 & -11 & -4 & -5 \\ 10 & 42 & 16 & 24 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7. Sei V ein nichttrivialer endlich-dimensionaler Vektorraum. Beweisen oder widerlegen Sie:
   (a) V ist eine direkte Summe von 1-dimensionalen Unterräumen, d.h. V kann geschrieben werden als
   $$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n,$$
   wobei U_i ein 1-dimensionaler Unterraum für alle $1 \leq i \leq n$ ist.
   (b) Für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ gilt $V = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.
   (c) Sei $V' \subset V$ ein Unterraum. Jeder Automorphismus $f\colon V' \to V'$ kann zu einem Automorphismus $\overline{f}\colon V \to V$ fortgesetzt werden.
   (d) Für Unterräume V_1, V_2, V_3 von V gilt $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ genau dann, wenn $V = V_1 + V_2 + V_3$ und $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}$ ist.

Solution:

(a) Diese Aussage ist richtig. Sei $\mathcal{B} = \{b_1 \ldots, b_n\}$ eine Basis von V. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{K}^n \to V,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$$

bijektiv. Andererseits ist jedes Element $b \in \mathcal{B}$ ungleich Null und somit ist die Abbildung $\mathbb{K} \to \langle b \rangle$, $x_b \mapsto x_b b$ bijektiv. Also ist auch die Abbildung

$$\langle b_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle b_n \rangle \to V,\ (x_1 b_1, \ldots, x_n b_n) \mapsto x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$$

bijektiv. Somit ist $V = \langle b_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle b_n \rangle$ die direktet Summe von 1-dimensionalen Unteräumen.

(b) Diese Aussage ist falsch. Betrachte zum Beispiel den durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegebenen Endomorphismus $T_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dann ist $\ker(T_A) = \langle \binom{1}{0} \rangle = \operatorname{im}(T_A)$. Die zwei Unterräume haben weder den Durchschnitt $\{0\}$, noch erzeugen sie zusammen $\mathbb{R}^2$, daher können sie nicht die direkte Summe $V = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$ bilden.

(c) Diese Aussage ist richtig. Wähle ein Komplement von V', das heisst, einen Unterraum V'' von V mit $V = V' \oplus V''$. Dann ist die Abbildung

$$V' \times V'' \to V,\ (v', v'') \mapsto v' + v''$$

bijektiv. Definiere eine Abbildung $\bar{f}\colon V \to V$ durch $\bar{f}(v' + v'') := f(v') + v''$ für alle $v' \in V'$ und $v'' \in V''$. Da f linear ist, zeigt eine direkte Rechnung, dass auch $\bar{f}$ linear ist. Wir behaupten, dass $\bar{f}$ bijektiv ist.
Seien dafür zunächst $v' \in V'$ und $v'' \in V''$ mit $f(v') + v'' = 0$. Dann ist $f(v') = -v'' \in V' \cap V'' = \{0\}$ und somit $f(v') = -v'' = 0$. Wegen der Injektivität von f ist dann auch $v' = 0$. Also ist $\ker(\bar{f}) = \{0\}$ und somit $\bar{f}$ injektiv.
Sei andererseits $v \in V$ beliebig. Schreibe $v = v' + v''$ mit $v' \in V'$ und $v'' \in V''$. Dann ist $v' = f(f^{-1}(v'))$ und somit $v = f(f^{-1}(v')) + v'' = \bar{f}(f^{-1}(v') + v'')$. Also ist $\bar{f}$ surjektiv.
Insgesamt ist $\bar{f}$ bijektiv und daher ein Isomorphismus $V \to V$, also ein Automorphismus von V.

(d) Diese Aussage ist falsch, zum Beispiel für die Unterräume $V_1 := \langle \binom{1}{0} \rangle$ und $V_2 := \langle \binom{0}{1} \rangle$ und $V_3 := \langle \binom{1}{1} \rangle$ von $\mathbb{R}^2$ gilt

$$V = V_1 + V_2 + V_3,$$

sowie

$$V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\},$$

jedoch gilt nicht

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3.$$