Lineare Algebra - Lösungen 12

1. Es sei V ein K-Vektorraum und $U \leq V$ ein Untervektorraum. Erinnern Sie sich an die Konstruktion der Abbildung $\alpha\colon (V/U)^* \to U^\perp$, $\alpha(\ell) = \ell \circ q_U$ aus der Vorlesung. Als Diagramm ist diese Abbildung beschrieben durch:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "q_U"'] \arrow[dr, dashed, "\alpha(\ell)"] & \\ V/U \arrow[r, "\ell"'] & K. \end{tikzcd}$$

   (a) Zeigen Sie, dass α eine lineare Abbildung ist.

   (b) Zeigen Sie, dass α injektiv und surjektiv ist.

   (c) Beschreiben Sie die Inverse Abbildung $\alpha^{-1}\colon U^\perp \to (V/U)^*$.

   Die Abbildung α ist ein *natürlicher* Isomorphismus.

Solution:

(a) Seien $\ell_1, \ell_2 \in\colon (V/U)^*$ und $\lambda \in K$. Dann ist

$$\alpha(\ell_1 + \lambda\ell_2) = (\ell_1 + \lambda\ell_2) \circ q_U = \ell_1 q_U + \lambda\ell_2 q_U = \alpha(\ell_1) + \lambda\alpha(\ell_2),$$

also ist α linear.

(b) Zuerst zeigen wir Injektivität: Angenommen $\ell \in\colon (V/U)^*$ ist nicht die Nullabbildung. Dann gibt es ein $x \in V/U$ sodass $\ell(x) \neq 0$. Wir wählen einen Repräsentanten $v \in V$ von x. Dann folgt

$$\alpha(v) = \ell \circ q_U(v) = \ell(x) \neq 0.$$

Folglich ist $\alpha(\ell)$ nicht die Nullabbildung und somit ist α injektiv.
Nun zur Surjektivität von α: Sei $\ell' \in U^\perp$ gegeben. Wir wissen, dass $U \subseteq \ker(\ell')$. Somit gilt für alle $v \in V$ und $u \in u$, dass

$$\ell'(v) = \ell'(v) + \ell'(u) = \ell'(v+u).$$

Also nimmt ℓ' auf der gesamten Äquivalenzklasse $v + U$ von v denselben Wert an. Wir definieren $\ell \in (V/U)^*$ als

$$\ell(x) := \ell'(v)$$

für alle $x \in V/U$, wobei $v \in V$ ein Repräsentant von x ist. Da ℓ' auf der gesamten Aquivalenzklasse $v + U$ denselben Wert annimmt, ist ℓ wohldefiniert.
Es sei nun $v \in V$ und $x = v + U$ die Äquivalenzklasse von v, dann folgt

$$\alpha(\ell)(v) = \ell \circ q_U(v) = \ell(x) = \ell'(v).$$

Also gilt $\alpha(\ell) = \ell'$ und α ist surjektiv.

(c) Die inverse Abbildung $\alpha^{-1}\colon U^\perp \to (V/U)^*$ haben wir schon im vorherigen Punkt konstruiert. Es gilt

$$\alpha^{-1}(\ell')(x) := \ell'(v),$$

für alle $\ell' \in U^{\perp}$, und alle $x \in V/U$, wobei v ein Repräsentant von x ist. Die Linearität dieser Abbildung lässt sich leicht zeigen. Der springende Punkt ist, dass diese Abbildung wohldefiniert ist und der Wert von ℓ' nicht von der Wahl des Repräsentanten v abhängt, da $U \subseteq \ker(\ell')$ gilt.

2. (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, gegeben durch

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

linear ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von f.

(d) Seien $\mathcal{B} = (e_1 + e_3, e_1 + e_2, e_2 + e_3)$ und $\mathcal{C} = (e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3, e_4 + e_5, e_4 - e_5)$. Bestimmen Sie $[T^*]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}$.

Solution:

(a) Setze

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

und sei $x^T = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ beliebig, dann ist $T(x) = L_A(x)$. Da x beliebig war ist T linear.

(b) Wir erinnern uns, dass für invertierbare Matrizen F gilt $\ker(L_A) = \ker(L_{FA})$ und wenden also elementare Zeilenumformungen auf A an:

$$A \xrightarrow[\substack{Z_4+Z_1 \\ Z_5-3Z_1}]{\substack{Z_2-2Z_1 \\ Z_3-2Z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_4-2Z_3 \\ Z_5+2Z_3}]{Z_1-Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da der Rang unter elementaren Zeilenumformungen invariant ist, sehen wir, dass $\text{Rang}(A) = 2$ gilt und folglich

$$\dim(\ker(T)) = \dim \mathbb{R}^3 - \text{Rang}(T) = 3 - \text{Rang}(L_A) = 3 - \text{Rang}(A) = 1$$

Jeder Vektor $(x_1, x_2, x_3)^T$ im Kern erfüllt gemäss der ersten Zeile der reduzierten Matrix $x_1 + x_3 = 0$ und gemäss der dritten Zeile $x_2 + 2x_3 = 0$. Dies trifft beispielsweise auf den Vektor $v := (1, 2, -1)^T$ zu und folglich ist $\{v = (1, 2, -1)^T\}$ eine Basis von $\ker(T)$. Wir überprüfen – dies ist eigentlich bereits bewiesen, wir kontrollieren also nur auf Rechenfehler – zur Sicherheit noch, ob v tatsächlich in $\ker(T)$ liegt:

$$T(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Da $\mathrm{Rang}(A) = 2$ und da $\mathrm{Im}(T)$ das Erzeugnis der Spalten von A ist, reicht es, zwei linear unabhängige Spalten von A zu finden. Man beachte, dass eine Menge $\{u, v\}$ genau dann linear abhängig ist, wenn $u = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$. Folglich ist $\{A^{(1)}, A^{(2)}\}$ eine Basis von $\mathrm{Im}(T)$.

(d) Wir wissen, dass

$$[T^*]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*} = \left([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^t = \left([I_{\mathbb{R}^5}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_5}[T]_{\mathcal{E}_5}^{\mathcal{E}_3}[I_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}}\right)^t = \left([I_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}}\right)^t A^t \left([I_{\mathbb{R}^5}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_5}\right)^t$$

Die Basiswechselmatrizen von einer Basis zur Standardbasis sind die Matrizen mit den entsprechenden Basisvektoren als Spalten. Entsprechend ist

$$[I_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[I_{\mathbb{R}^5}]_{\mathcal{E}_5}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [I_{\mathbb{R}^5}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_5} = \left([I_{\mathbb{R}^5}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_5}\right)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

und folglich

$$[T^*]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -2 & 10 & 4 & -4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 11 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Betrachten Sie den Unterraum U_1 von $\mathbb{R}^4$, gegeben als

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Finden Sie ein Komplement W_1 zu U_1, das heisst einen Unterraum $W_1 \leq \mathbb{R}^4$, sodass $U_1 + W_1 = \mathbb{R}^4$ und $U_1 \cap W_1 = \{0\}$.

(b) Betrachten Sie den Unterraum U_2 von $\mathbb{R}^4$, gegeben als

$$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid 9x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0,\ 8x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0\}$$

Finden Sie nun ein Komplement W_2 zu U_2.

(c) Erinnern Sie sich an das kanonische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert in Aufgabe 3, der Serie 11. Finden Sie orthogonale Komplemente X_1 und X_2 zu U_1 beziehungsweise U_2. Sprich Komplemente, sodass alle Elemente aus X_i orthogonal zu allen Elementen aus U_i bezüglich des kanonischen Skalarprodukts sind.

(d) Was fällt Ihnen auf? Erklären Sie Ihre Erkenntnis mit Hilfe der Aufgabe 1 dieser Serie und der Aufgabe 3 der Serie 11.

Solution:

(a) Ein mögliches Komplement zu U_1 ist gegeben durch

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

denn die beiden erzeugenden Vektoren sind linear unabhängig und nicht in U_1 enthalten.

(b)

(c) Ein mögliches Komplement zu U_2 ist gegeben durch

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

denn die beiden erzeugenden Vektoren sind linear unabhängig und nicht in U_2 enthalten, da sie die benötigten Gleichungen nicht erfüllen.

(d) Um X_1 zu finden, müssen wir 2 linear unabhängige Vektoren finden, die zu den beiden U_1 erzeugenden Vektoren orthogonal sind. Das sind zum Beispiel die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $X_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$ ein orthogonales Komplement zu U_1.
Um X_2 zu finden bemerken wir, dass wir Basisvektoren von X_2 direkt aus der Beschreibung des Untervektorraums U_2 erkennen können, nämlich $X_2 = \langle x_2, y_2 \rangle$, wobei

$$x_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(e) Wir bemerken, dass die beiden Unterräume W_1 und W_2 verschieden sind, die beiden Unterräume X_1 und X_2 aber dieselben. Es gilt

$$3x_1 + y_1 = x_2, \quad -4x_1 + 2y_1 = y_2,$$

also ist $X_1 = X_2$.
Das liegt daran, dass U_1 und U_2 tatsächlich ein und derselbe Unterraum sind ! Zu einem Unterraum gibt es auch nur ein einziges orthogonales Komplement, daher ist es nicht verwunderlich, dass $X_1 = X_2$ gilt - wir hatten bei der Wahl dieser beiden Komplemente keine andere mögliche Auswahl.
In der Aufgabe 1 dieser Serie, haben wir den natürlichen Isomorphismus

$$\alpha \colon (V/U)^* \to U^\perp$$

für einen Unterraum $U \leq V$ konstruiert. In der Aufgabe 3 der Serie 11 haben wir den Annulator $U^\perp$ eines Unterraums mit Hilfe des kanonischen Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ als einen Unterraum von V aufgefasst, nämlich

$$U^\perp \simeq \{v \in V \mid \ell_v(u) = 0, \forall u \in U\}.$$

Dieser Unterraum ist in unserem Beispiel genau das orthogonale Komplement $X_1 = X_2$. Jedoch sind die beiden Komplemente W_1 und W_2 verschieden, weil die Wahl des Komplements eines Unterraums keine *kanonische* Wahl ist. Es gibt kein präferiertes Komplement eines nicht-trivialen Unterraums.

Es kann durchaus der Fall sein, dass aufgrund Ihrer Herangehensweise W_1 und W_2 dieselben Unterräume ergeben. Das war dann aber "purer Zufall" und hätte genau so gut auch anders sein können.

4. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, sei W ein Unterraum von V. Finden Sie einen kanonischen Isomorphismus
$$\left(V^*/W^\perp\right)^* \cong W.$$

Solution: Wir definieren $\Psi : W \to \left(V^*/W^\perp\right)^*$ durch

$$\Psi(w)(f + W^\perp) := \mathrm{ev}_w(f)$$

wobei $\mathrm{ev}_w : V^* \to \mathbb{K}$, $f \mapsto f(w)$ die Evaluationsabbildung in w ist. Wir zeigen, dass Ψ wohldefiniert ist. Seien $f, f' \in V^*$ mit $f + W^\perp = f' + W^\perp$, dann ist $f' = f + h$ mit $h \in W^\perp$ und folglich
$$\mathrm{ev}_w(f') = \mathrm{ev}_w(f + h) = \mathrm{ev}_w(f) + \underbrace{\mathrm{ev}_w(h)}_{=h(w)=0} = \mathrm{ev}_w(f)$$

Also ist Ψ wohldefiniert.

Es wurde in der Vorlesung gezeigt, dass die Abbildung $w \mapsto \mathrm{ev}_w$ linear ist. Folglich ist für $w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ sowie für $f \in V^*$

$$\begin{aligned}\Psi(w_1 + \lambda w_2)(f + W^\perp) &= \mathrm{ev}_{w_1+\lambda w_2}(f) = \mathrm{ev}_{w_1}(f) + \lambda \mathrm{ev}_{w_2}(f)\\ &= \Psi(w_1)(f + W^\perp) + \lambda\Psi(w_2)(f + W^\perp)\\ &= \big(\Psi(w_1) + \lambda\Psi(w_2)\big)(f + W^\perp)\end{aligned}$$

und somit ist Ψ linear.

Wir zeigen, dass Ψ injektiv ist. Seien $w_1, w_2 \in W$ mit $\Psi(w_1) = \Psi(w_2)$, dann ist für beliebige $f \in V^*$

$$f(w_1) = \mathrm{ev}_{w_1}(f) = \Psi(w_1)(f + W^\perp) = \Psi(w_2)(f + W^\perp) = \mathrm{ev}_{w_2}(f) = f(w_2)$$

Insbesondere ist $\mathrm{ev}_{w_1} = \mathrm{ev}_{w_2}$. Da die Abbildung $V \to V^{**}$, $v \mapsto \mathrm{ev}_v$ ein Isomorphismus und insbesondere injektiv ist, folgt $w_1 = w_2$.

Um zu zeigen, dass Ψ ein Isomorphismus ist, reicht es wegen der Dimensionsformel und der bereits diskutierten Injektivität von Ψ zu zeigen, dass

$$\dim \left(V^*/W^\perp\right)^* = \dim W$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $U \cong U^*$ für alle endlichdimensionalen Vektorräume U. Somit folgt aus Aufgabe 1 in dieser Serie, dass $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$, also gilt

$$\begin{aligned}\dim\left(V^*/W^\perp\right)^* &= \dim(V^*/W^\perp) = \dim V^* - \dim W^\perp \\ &= \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W\end{aligned}$$

wie gewünscht.

5. Es sei $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Diese Aufgabe soll Ihnen zeigen, dass die im ersten Isomorphismussatz konstruierte Abbildung $\overline{T}$ "alle wichtigen Informationen der Abbildung T enthält".
Angenommen, Sie erweitern die Abbildung T zu einer Abbildung $S\colon \mathbb{R}^{20} \to \mathbb{R}^{40}$ in dem Sie S durch

$$S(x_1, \ldots, x_{20}) := (T(x_1, x_2), 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^{40}$$

definieren, also indem Sie ${}^T(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ als die ersten drei Koordinaten in $\mathbb{R}^{40}$ auffassen.

(a) Zeigen Sie, unter Anwendung des ersten, zweiten und dritten Isomorphiesatzes, dass die Abbildungen $\overline{T}$ und $\overline{S}$ *konjugiert* zueinander sind. Das heisst, finden Sie Isomorphismen φ und ψ, sodass

$$\overline{T} = \psi \circ \overline{S} \circ \varphi.$$

Finden Sie also unter anderem den Definitions- und Bildbereich der Isomorphismen φ und ψ.

(b) Erklären Sie, warum sich die Abbildungen $\overline{T}$ und $\overline{S}$ also faktisch nicht von einander unterscheiden lassen.
Tipp: Überprüfen Sie die Abbildungsmatrizen der beiden Abbildungen.

(c) Berechnen Sie $\overline{T}$ für die Abbildung

$$T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \end{pmatrix}.$$

Solution:

(a) Die durch T induzierte Abbildung T ist definiert durch

$$\begin{aligned}\overline{T}\colon \mathbb{R}^2/\ker(T) &\to \operatorname{im}(T) \\ x &\mapsto T(v),\end{aligned}$$

wobei $v \in \mathbb{R}^2$ ein Repräsentant von x ist.

Analogerweise ist die durch S induzierte Abbildung S definiert durch

$$\begin{aligned}\overline{S}\colon \mathbb{R}^{20}/\ker(S) &\to \operatorname{im}(S)\\ x &\mapsto S(v),\end{aligned}$$

wobei $v \in \mathbb{R}^{20}$ ein Repräsentant von x ist.
Nun gilt aber $\mathbb{R}^{20} = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{18}$ sowie $\ker(S) = \ker(T) \times \mathbb{R}^{18}$, denn S bildet die künstlich hinzugefügten 18 Koordinaten alle auf den Nullvektor ab. Ausserdem kann man sicht leicht davon überzeugen, dass $\operatorname{im}(S) = \operatorname{im}(T) \oplus \{(0,\ldots,0)\}$ gilt.
Sei $0_{\mathbb{R}^n}$ der Nullvektor in $\mathbb{R}^n$. Dann folgt mit dem dritten Isomorphismussatz, dass

$$\mathbb{R}^{20}/\ker(S) = (\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{18})/(\ker(T) \oplus \mathbb{R}^{18}) \cong (\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{18})/(\{0_{\mathbb{R}^2}\} \oplus \mathbb{R}^{18}) \Big/ (\ker(T) \oplus \mathbb{R}^{18})/(\{0_{\mathbb{R}^2}\} \oplus \mathbb{R}^{18})$$

wobei wir die Vektorräume $\{0_{\mathbb{R}^2}\} \oplus \mathbb{R}^{18} \leq \ker(T) \oplus \mathbb{R}^{18} \leq \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{18}$ verwendet haben.
Durch zweimaliges anwenden des zweiten Isomorphismussatzes erhalten wir

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{18})/(\{0_{\mathbb{R}^2}\} \oplus \mathbb{R}^{18}) &\cong (\mathbb{R}^2 \oplus \{0_{\mathbb{R}^{18}}\})/(\mathbb{R}^2 \oplus \{0_{\mathbb{R}^{18}}\} \cap \{0_{\mathbb{R}^2}\} \oplus \mathbb{R}^{18})\\ &= (\mathbb{R}^2 \oplus \{0_{\mathbb{R}^{18}}\})/\{0_{\mathbb{R}^{20}}\}\\ &\cong \mathbb{R}^2,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(\ker(T) \oplus \mathbb{R}^{18})/(\{0_{\mathbb{R}^2}\} \oplus \mathbb{R}^{18}) &\cong (\ker(T) \oplus \{0_{\mathbb{R}^{18}}\})/(\ker(T) \oplus \{0_{\mathbb{R}^{18}}\} \cap \{0_{\mathbb{R}^2}\} \oplus \mathbb{R}^{18})\\ &= \ker(T) \oplus \{0_{\mathbb{R}^{18}}\}/\{0_{\mathbb{R}^{20}}\}\\ &\cong \ker(T).\end{aligned}$$

Daher folgt

$$\mathbb{R}^{20}/\ker(S) \cong \mathbb{R}^2/\ker(T).$$

Wir nennen φ den dadurch gegebenen Isomorphismus $\varphi\colon \mathbb{R}^2/\ker(T) \to \mathbb{R}^{20}/\ker(S)$. Des Weiteren wählen wir für ψ den Isomorphismus

$$\psi\colon\ \operatorname{im}(S) \to \operatorname{im}(W) \tag{1}$$
$$(w, 0\ldots, 0) \mapsto w \tag{2}$$

der durch das Vergessen der letzten 37 Koordinaten eines Vektors $w \in \operatorname{im}(S) = \operatorname{im}(T) \oplus \{(0,\ldots,0)\} \leq \mathbb{R}^{40}$ gegeben ist.
Eine leichte Rechnung ergibt dann das gewünschte Resultat. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^2/\ker(T)$, dass

$$\psi(\overline{S}(\phi(x))) = \psi(S(v, 0, \ldots, 0)) = \psi((T(v), 0, \ldots, 0)) = T(v) = \overline{T}(x)$$

wobei $v \in \mathbb{R}^2$ ein Repräsentant von x ist. Hier haben wir verwendet, dass $(v, 0, \ldots, 0)$ ein Repräsentant von $\phi(x)$ ist.

(b) Wählen wir beliebige Basen $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2/\ker(T)$ und $\mathcal{C}$ von $\operatorname{im}(T)$, so sind $\varphi(\mathcal{B})$ und $\psi^{-1}(\mathcal{C})$

Basen von $\mathbb{R}^{20}/\ker(S)$ beziehungsweise $\operatorname{im}(S)$. Weiters sind die beiden Abildungsmatrizen $[\overline{T}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ und $[\overline{S}]^{\varphi(\mathcal{B})}_{\psi^{-1}(\mathcal{C})}$ identisch. Folglich kann man die Abbildungen $\overline{T}$ und $\overline{S}$ nicht voneinander unterscheiden, wenn man die entsprechenden Basen wählt.

(c) Wir berechnen zunächst, dass $\ker(T) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$. Somit können wir für jede Nebenklasse $x + \ker(T)$ einen Repräsentanten finden, dessen ersten beiden Koordinaten verschwinden. Die induzierte Abbildung ist also gegeben durch

$$\overline{T}(x + \ker(T)) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b \\ 2a-3b \end{pmatrix}.$$

6. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und

$$\langle\, , \rangle_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \langle x, y\rangle_A := x^t A y.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\langle\, , \rangle_A$ genau dann ein *Skalarprodukt* ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $A = A^t$, also $b = c$.
- $a > 0$ und $ad - b^2 > 0$.

(Für einen Vektorraum V ist eine Abbildung $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt, *wenn*

- *(positiv definit): $B(x,x) \geq 0$ für alle $x \in V$ und $B(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*
- *(symmetrisch): $B(x,y) = B(y,x)$ für alle $x, y \in V$.*
- *(bilinear): B ist bilinear, das heisst B ist linear in beiden Koordinaten.)*

(b) Für welche Matrizen $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ beschreibt $\langle\, , \rangle_A$ eine Linearform auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, also $\langle\, , \rangle_A \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)^*$?

(c) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ invertierbar ist, falls $\langle\, , \rangle_A$ ein Skalarprodukt ist.

(d) Finden Sie ein Beispiel für eine invertierbare Matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, für die $\langle\, , \rangle_A$ kein Skalarprodukt ist.

(e) Sei $x \in \mathbb{R}^2$ und $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\ell(y) = \langle x, y\rangle_A$ eine Linearform auf $\mathbb{R}^2$ beschreibt. Drücken Sie ℓ in der dualen Basis $\{e_1^*, e_2^*\}$ der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$ aus und beschreiben Sie $\ker(\ell)$ in Abhängigkeit von x und A.

Solution:

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, und $x = \binom{x_1}{x_2}$, $y = \binom{y_1}{y_2}$ dann ist

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dy_2x_2.\end{aligned}$$

Die linearität des Skalarprodukts folgt aus den Eigenschaften der Multiplikation von Matrizen. Ausserdem, ist $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$, genau dann wenn

$$bx_1y_2 + cy_1x_2 = by_1x_2 + cx_1y_2,$$

d.h. wenn $b = c$ ist. Zusätzlich ist $\langle x, x\rangle > 0$, für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^2$, genau dann wenn

$$\langle x, x\rangle = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 > 0.$$

Wenn wir nun den obigen Ausdruck als Polynom in der Variablen x_1 betrachten, dann ist $\langle x, x\rangle > 0$ genau dann wenn $a > 0$ und die Diskrimnante Λ des quadratischen Polynoms negativ ist, also

$$\Lambda = (2bx_2)^2 - 4(adx_2^2) = 4x_2^2(b^2 - ad) < 0,$$

d.h. $ad - b^2 > 0$.

(b) Nach der vorherigen Teilaufgabe gilt für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, dass $\langle \cdot, \cdot\rangle_A \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$\langle x, y\rangle_A = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dy_2x_2,$$

gegeben ist. Insbesondere gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$, dass

$$\langle \lambda(x, y)\rangle_A = \langle \lambda x, \lambda y\rangle_A = \lambda x^t A(\lambda y) = \lambda^2 x^t Ay = \lambda^2\langle x, y\rangle_A.$$

Daraus folgt, dass $\langle \cdot, \cdot\rangle_A$ genau dann eine Linearform ist, falls es die Nullabbildung ist, andernfalls wäre die Abbildung nicht linear. Jedoch gilt

$$\langle \tbinom{1}{0}, \tbinom{1}{0}\rangle_A = a, \quad \langle \tbinom{1}{0}, \tbinom{0}{1}\rangle_A = b, \quad \langle \tbinom{0}{1}, \tbinom{1}{0}\rangle_A = c, \quad \langle \tbinom{0}{1}, \tbinom{0}{1}\rangle_A = d,$$

also ist $\langle \cdot, \cdot\rangle_A$ die Nullabbildung genau dann, wenn $A = 0$.

(c) Um zu zeigen, dass $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit $ad - b^2 > 0$ invertierbar ist, müssen wir eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

finden, sodass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ be + dg & bf + dh \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA = \begin{pmatrix} ea + fb & eb + fd \\ ga + hb & gb + hd \end{pmatrix}.$$

Aus den Bedingungen $be + dg = 0 = eb + fd$ folgt $f = g$ (beachte, dass $d \neq 0$ gelten muss!). Durch die Bedingung $ea + fb = 1$ erhalten wir

$$e = \frac{1 - fb}{a}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck nun in $eb + fd = 0$ ein und lösen nach f auf, so folgt

$$f = -\frac{b}{ad - b^2}.$$

Daraus ergibt sich

$$e = \frac{1 - fb}{a} = \frac{d}{ad - b^2}.$$

Eine analoge Rechnung ergibt für h den Ausdruck

$$h = \frac{1 - gb}{d} = \frac{a}{ad - b^2}.$$

Zusammenfassend erhalten wir, dass

$$B = \frac{1}{ad - b^2} \begin{pmatrix} d & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

die inverse Matrix von A ist.

(d) Zum Beispiel ist die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ invertierbar, denn $C^2 = \mathbf{1}_2$. Jedoch ist $1 \cdot (-1) - 0^2 < 0$, somit kann $\langle \cdot, \cdot \rangle_C$ kein Skalarprodukt sein.

(e) Wir fixieren $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Dann ist ℓ in der Basis $\{e_1^*, e_2^*\}$ gegeben durch

$$\ell = (ax_1 + cx_2)e_1^* + (bx_1 + dx_2)e_2^*.$$