Lineare Algebra - Lösungen 13

Hinweis: Sie dürfen für alle Übungen in dieser Serie annehmen, dass die n Determinantenfunktionen $D_n^{(i)}$ für $1 \leq i \leq n$, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben, tatsächlich gleich sind. Diese Determinantenfunktion wird in dieser Serie als D_n bezeichnet und "die Determinante" genannt.

1. Für $i = 1, \ldots, n-1$ sei $\sigma_i \in S_n$ die Permutation, die i und $i+1$ vertauscht und alle übrigen Elemente von $\{1, \ldots, n\}$ festlässt, genannt *Nachbartransposition*.
   Zeigen Sie, dass jedes Element von S_n ein Produkt von Nachbartranspositionen ist.

Solution: Wir verwenden Induktion über n. Da $S_1 = \{\mathrm{id}_{S_1}\}$ und id_{S_1} gleich dem leeren Produkt ist, gilt die Aussage für $n = 1$. Für $n \geq 2$ können wir annehmen, dass die Aussage für $n-1$ gilt.

Behauptung: Für jedes $1 \leq i < n$ bildet die Permutation $\sigma_i \cdots \sigma_{n-1} \in S_n$ die Ziffer n auf die Ziffer i ab.

Beweis: Für $i = n-1$ ist diese Permutation die Nachbartransposition σ_{n-1} und bildet n auf $i = n-1$ ab. Für $i < n-1$ können wir mit absteigender Induktion annehmen, dass $\sigma_{i+1} \cdots \sigma_{n-1}$ die Ziffer n auf $i+1$ abbildet. Da σ_i die Ziffer $i+1$ auf i abbildet, folgt die entsprechende Aussage dann auch für i. $\square$

Sei nun $\sigma \in S_n$ beliebig und setze $i := \sigma(n)$. Wegen $\sigma(n) = i = (\sigma_i \cdots \sigma_{n-1})(n)$ gilt für die Permutation

$$\tau := (\sigma_i \cdots \sigma_{n-1})^{-1} \sigma$$

dann $\tau(n) = n$. Fassen wir τ als Element von S_{n-1} auf, so folgt aus der Induktionsvoraussetzung, dass τ ein Produkt von Nachbartranspositionen ist. Somit gilt dasselbe auch für

$$\sigma = \sigma_i \cdots \sigma_{n-1} \tau.$$

2. Berechnen Sie die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Solution: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $D_3(A_{11}) = 48, D_3(A_{12}) = -48, D_3(A_{13}) = -12, D_3(A_{14}) = 12$. Daraus folgt

$$D_4(A) = 1 \cdot D_3(A_{11}) - 1 \cdot D_3(A_{12}) + 1 \cdot D_3(A_{13}) - 1 \cdot D_3(A_{14}) = 72.$$

3. Seien α und β die zwei Permutationen in S_6

$$\alpha := (4,5,3,1,6,2), \qquad \beta := (2,6,3,5,1,4).$$

   (a) Berechnen Sie $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, α^{-1}, β^{-1}.
   (b) Schreiben Sie α als Produkt von Transpositionen in S_6.
   (c) Berechnen Sie $\operatorname{sgn}(\alpha)$ und $\operatorname{sgn}(\beta)$.

Solution:

(a) Es gilt

$$\alpha\beta = (5,2,3,6,4,1),$$
$$\beta\alpha = (5,1,3,2,4,6),$$
$$\alpha^{-1} = (4,6,3,1,2,5),$$
$$\beta^{-1} = (5,1,3,6,4,2).$$

(b) Hier sind alle Möglichkeiten, α als Produkt von drei Transpositionen zu schreiben:
$\alpha = (2,6)(2,5)(1,4) = (5,6)(2,6)(1,4) = (2,5)(5,6)(1,4)$
$= (2,6)(1,4)(2,5) = (5,6)(1,4)(2,6) = (2,5)(1,4)(5,6)$
$= (1,4)(2,6)(2,5) = (1,4)(5,6)(2,6) = (1,4)(2,5)(5,6)$;
β lässt sich auf 125 Arten als Produkt von vier Transpositionen schreiben, zum Beispiel
$\beta = (1,5)(1,4)(1,6)(1,2)$

(c) Daher gilt $\operatorname{sgn}(\alpha) = -1$ und $\operatorname{sgn}(\beta) = 1$.

4. Sei $A_n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie:

$$D_n(A_n) = n+1\,.$$

Solution: Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach n. Für $n = 1\,,2$ erhalten wir

$$D_1(A_1) = 2\,, D_2(A_2) = 4-1 = 3$$

gemäß unserer Behauptung. Wir nehmen also an, dass $n > 2$ und die Aussage ist für alle $n' < n$ gezeigt. Entwicklung nach der ersten Spalte ergibt

$$D_n(A_n) = 2\cdot D_{n-1}(A_{n-1}) - 1\cdot D_{n-2}(A_{n-2}) = 2n - (n-1) = n+1\,.$$

Hierbei wurde die Induktionsvoraussetzung verwendet, und für den zweiten Summanden wurde nach der ersten Zeile entwickelt.

5. (a) Zeigen Sie, dass die Zeilen einer Matrix $A \in M_{2\times 2}(K)$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $\det(A) \neq 0$.
Folgern Sie daraus, dass $A \in M_{2\times 2}(K)$ genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$.

(b) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen und bestimmen Sie, welche Matrizen invertierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
$$C = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 5-2i & 6+4i \\ -3+i & 7i \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$$
$$E = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \mod 7 \text{ und } F = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \mod 7 \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}_7)$$

Solution:

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ in $M_{2\times 2}(K)$.
"$\Leftarrow$" Angenommen $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0$ wobei $A_{22} \neq 0$ oder $A_{12} \neq 0$. Dann gilt

$$A_{22} \cdot (A_{11}, A_{12}) - A_{12} \cdot (A_{21}, A_{22}) = (0, 0),$$

also sind die Zeilen von A nicht linear unabhängig.
Falls $A_{22} = 0$ und $A_{12} = 0$, so können die beiden Zeilen auch nicht linear unabhängig sein, da sie Teil des eindimensionalen Unterraums $\langle (1,0) \rangle$ in K^2 sind.
Also kann A nur dann linear unabhängige Zeilen haben, wenn $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \neq 0$ gilt.
"$\Rightarrow$" Angenommen $D := A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \neq 0$ gilt. Sei $(x, y) \in K^2$. Wir definieren

$$\alpha := \frac{A_{22}x - A_{21}y}{D}, \qquad \beta := \frac{-A_{12}x + A_{11}y}{D}.$$

Dann gilt

$$\alpha \cdot (A_{11}, A_{12}) + \beta \cdot (A_{21}, A_{22}) = (x, y),$$

und somit sind die beiden Zeilenvektoren von A ein Erzeugendensystem, und da $\dim(K^2) = 2$ ist, formen die Zeilen insbesondere eine Basis von K^2. Sie sind somit auch linear unabhängig.

Zusammenfassend gilt: Die Zeilen $A_{(1)} = (A_{11}, A_{12})$ und $A_{(2)} = (A_{21}, A_{22})$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ gilt $\det(A) \neq 0$.

$A \in M_{2\times 2}(K)$ ist genau dann invertierbar, wenn die Spalten linear unabhängig sind, bzw.

wenn $\dim \text{Spaltenraum}(A) = 2$. Wegen

$$\dim \text{Spaltenraum}(A) = \dim \text{Zeilenraum}(A)$$

ist A also genau dann invertierbar, wenn die Zeilen von A linear unabhängig sind, also wenn $\det(A) \neq 0$.

In der Vorlesung haben wir ausserdem gesehen, dass die Inverse einer 2×2-Matrix explizit als

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann.

(b) Wir berechnen beispielsweise

1. $\det(A) = -5 + 12 = 7$
2. $\det(C) = -5 + 12 = 7$
3. $\det(E) = -5 + 12 = 7 \equiv 0 \mod 7$ und $\det(F) = 36 - 0 \equiv 1 \mod 7$

wobei wir für die letzten beiden Matrizen verwendet haben, dass für alle $a, b, c, d, n \in$ gilt

$$(a \mod n)(d \mod n) - (b \mod n)(c \mod n) = ad - bc \mod n.$$

Man findet, dass alle Beispiele ausser E invertierbar sind.

6. Seien a und b Elemente eines Körpers K und A die $(n \times n)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & b \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass $D_n(A) = (b-a)^{n-1}\big(b + (n-1)a\big)$.

Solution: Wir zeigen die Aussage mit Induktion: Für $n = 1$ ist die Aussage klar. Nehmen wir an, dass $d_k := D_k(A) = (b-a)^{k-1}\big(b + (k-1)a\big)$ für $A \in M_{k\times k}(K)$. Dann ist für $A \in$

$M_{(k+1)\times(k+1)}(K)$:

$$D_{k+1}\begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & b \end{pmatrix} = D_{k+1}\begin{pmatrix} b-a & a-b & 0\dots & 0 & \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & a & \dots & a & b \end{pmatrix}$$

$$= (b-a)d_k + (b-a)D_k\begin{pmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & a & \dots & a & b \end{pmatrix}$$

$$= (b-a)^k\big(b+(k-1)a\big) + (b-a)D_{k-1}\begin{pmatrix} 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & a & \dots & a & b \end{pmatrix}$$

$$= (b-a)^k\big(b+(k-1)a\big) + (b-a)^2D_{k-2}\begin{pmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & a & \dots & a & b \end{pmatrix}$$

$$\dots$$

$$= (b-a)^k\big(b+(k-1)a\big) + (b-a)^{k-1}(ab-a^2) = (b-a)^k\big(b+ka\big).$$

wobei wir die Gleichungen jeweils dadurch erhalten, dass wir zunächst die zweite von der ersten Zeile subtrahiert haben, und dann die Konstruktion der Determinantenfunktion verwenden.

7. Die Zahlen 2014, 1484, 3710 und 6996 sind alle durch 106 teilbar. Zeigen Sie, ohne die Derterminante konkret zu berechnen, dass auch die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

durch 106 teilbar ist.

Solution: Wir addieren (1000×(1. Spalte) + 100×(2. Spalte) + 10×(3. Spalte)) zur 4. Spalte.

Wir ändern die Determinante dadurch nicht da sie per Definition alternierend und 4-linear ist. Wir erhalten:

$$D_4 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 9 & 6 \end{pmatrix} = D_4 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2014 \\ 1 & 4 & 8 & 1484 \\ 3 & 7 & 1 & 3710 \\ 6 & 9 & 9 & 6996 \end{pmatrix}.$$

Da jeder Eintrag in der letzten Spalte durch 106 teilbar ist, gilt

$$D_4 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2014 \\ 1 & 4 & 8 & 1484 \\ 3 & 7 & 1 & 3710 \\ 6 & 9 & 9 & 6996 \end{pmatrix} = 106 \cdot D_4 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & a_1 \\ 1 & 4 & 8 & a_2 \\ 3 & 7 & 1 & a_3 \\ 6 & 9 & 9 & a_4 \end{pmatrix}$$

aufgrund von 4-linearität, mit ganzen Zahlen $a_1, \ldots, a_4$. Da die Determinante einer Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$ wieder in $\mathbb{Z}$ liegt, folgt die Aussage. All dies kann man sich im Prinzip im Kopf überlegen.