Lineare Algebra II

FS 2024

Musterlösung Serie 19

Jordansche Normalenform

In diesem Übungsblatt werden die Begriffe “Hauptraum” und “verallgemeinerter Eigenraum” synonym verwendet.

1. Bestimme die Jordansche Normalenform und eine zugehörige Basiswechselmatrix der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & 2 & & \\ & & 7 & 3 & \\ & & & 7 & 4 \\ & & & & 7 \end{pmatrix} \in M_{5\times 5}(\mathbb{Q}).$$

Lösung: Die Matrix A hat eine einzige Eigenwert $\lambda = 7$. Wir berechnen zuerst

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Eig}_A(\lambda) &= \dim \ker(A - \lambda \cdot I_5) \\ &= \dim \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & 3 & \\ & & & 0 & 4 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Also hat die Jordansche Normalenform von A nur einen Block zum Eigenwert λ und sonst nichts. Folglich ist A ähnlich zu ihrer Normalenform

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & 1 & & \\ & & 7 & 1 & \\ & & & 7 & 1 \\ & & & & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimme die Jordansche Normalenform und eine zugehörige Basiswechselmatrix der komplexen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom der Matrix A ist

$$\mathrm{char}_A(X) \;=\; X^4 - 11X^3 + 45X^2 - 81X + 54 \;=\; (X-2)\cdot(X-3)^3 .$$

Wir betrachten die Eigenwerte 2 und 3 separat.

Eigenwert 2: Der Raum $\widetilde{\mathrm{Eig}}_A(2)$ ist eindimensional und gleich dem Eigenraum von A zum Eigenwert 2. Wir berechnen $\mathrm{Kern}(L_{A-2I_4})$ und finden den zugehörigen Eigenvektor

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}.$$

Eigenwert 3: Für $B := A - 3I_4$ gilt

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -B^3.$$

Dies impliziert

k	1	2	3	4	$\cdots$
$\mathrm{rank}(B^k)$	2	1	1	1	$\cdots$
$\dim \mathrm{Kern}(L_{B^k})$	2	3	3	3	$\cdots$
$\#\ k \times k$-Jordanblöcke zum EW 3	1	1	0	0	$\cdots$

Sodann rechnen wir

$$\widetilde{\mathrm{Eig}}_A(3) \;=\; \mathrm{Kern}(L_{B^3}) \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} 2\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Dann suchen wir einen Vektor $v_2 \in \widetilde{\mathrm{Eig}}_A(3)$, dessen Bild unter L_B ungleich Null ist. Zum Beispiel tut es

$$v_2 := \begin{pmatrix} -6\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad Bv_2 = \begin{pmatrix} 8\\2\\2\\0 \end{pmatrix}.$$

Diesen ergänzen wir um einen beliebigen Vektor $v_3 \in \mathrm{Kern}(L_B) \setminus \langle Bv_2 \rangle$, zum

Beispiel

$$v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann bildet v_2, Bv_2, v_3 eine Basis von $\widetilde{\mathrm{Eig}}_A(3)$.

Zusammenführung: Nach der Hauptraumzerlegung ist $b := (v_1, Bv_2, v_2, v_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$. Nach Konstruktion gilt für diese $Av_1 = 2v_1$ und $A(Bv_2) = 3(Bv_2)$ und $Av_2 = Bv_2 + 3v_2$ sowie $Av_3 = 3v_3$. Für die Basiswechselmatrix

$$S \;:=\; (v_1 \mid v_3 \mid Bv_2 \mid v_2) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt also

$$S^{-1}AS \;=\; \left(\begin{array}{c|c|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Dies ist die Jordansche Normalform von A.

3. (a) Finde ein Vektorraum V und eine lineare Abbildung $T \in \mathrm{Hom}(V)$, so dass

$$V = \ker(T) \oplus \mathrm{Bild}(T) \tag{※}$$

nicht gilt.

(b) Können Sie ein Kriterium finden, um festzustellen, für welche linearen Operatoren Gleichung (※) gilt?

Lösung:

(a) Betrachten Sie den Vektorraum $V = \mathbb{K}[X]_{\leqslant 3}$, den Raum der Polynome über dem Körper $\mathbb{K}$ mit höchstens Grad 3, und den linearen Operator T, den wir als die Ableitung nehmen. Wir haben

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{\text{Untervektorraum der konstanten Polynome}\}, \\ \mathrm{Bild}(T) &= \{\text{Untervektorraum der Polynome mit höchstens Grad 2}\}. \end{aligned}$$

Ihr Schnitt ist offensichtlich nicht trivial. Daher gilt $V \neq \ker(T) \oplus \mathrm{Bild}(T)$.

(b) Wir vermuten, dass das Kriterium $T^2 = T$ ausreichend ist, damit (※) gilt. Wir zeigen zuerst, dass

$$V = \ker(T) + \mathrm{Bild}(T).$$

Da beide Unterräume sind, gilt sofort $V \supseteq \ker(T) + \text{Bild}(T)$. Für $x \in V$ betrachten wir $y = x - Tx$. Dann haben wir

$$Ty = Tx - T^2x = Tx - Tx = 0.$$

Also ist $y \in \ker(T)$. Da

$$x = Tx + x - Tx, \ \forall x \in V,$$

haben wir $V \subseteq \ker(T) + \text{Bild}(T)$.

Wir müssen jetzt zeigen, dass $\ker(T) \cap \text{Bild}(T) = \{0\}$. Nehmen wir an, dass $x \in \ker(T) \cap \text{Bild}(T)$ ist. Dann gibt es $x' \in V$, sodass $Tx' = x$. Auch, da $x \in \ker(T)$, gilt

$$\begin{aligned} 0 &= Tx \\ &= T^2x' \\ &= Tx' \\ &= x. \end{aligned}$$

Somit ist $\ker(T) \cap \text{Bild}(T) = \{0\}$. Damit ist der Beweis abgeschlossen, dass $V = \ker(T) \oplus \text{Bild}(T)$.

4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{C}).$$

Finde einen Vektor, der eine Jordan-Kette der Länge 3 von A erzeugt.

Lösung: Beachten Sie, dass 6 der einzige Eigenwert von A ist und dass $\dim \text{Eig}_A(6) = 2$. Wir berechnen, dass die erste Potenz von $A - 6I_4$, die verschwindet, 3 ist. Die Bedingungen für einen Vektor $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{C}^4$, um in $\ker(A - 6I_4)$ bzw. $\ker((A - 6I_4)^2)$ zu sein, lauten

$$\begin{cases} z + w &= -x \\ z + w &= -y \end{cases}, \text{ bzw.} \begin{cases} z + w = -y \end{cases}.$$

Daher ist

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein geeigneter Kandidat. Wir überprüfen, dass

$$(A - 6I_4)v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$(A - 6I_4)^2 v = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass v eine Jordan-Kette der Länge 3 für A erzeugt.

5. Sei N eine komplexe 3×3 nilpotente Matrix.

   (a) Zeige, dass $A = I_3 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$ die Gleichung $A^2 = I + N$ erfüllt. Wir sagen, dass A eine Quadratwurzel von $I + N$ ist.

   (b) Verwende (a), um zu zeigen, dass wenn $\lambda \neq 0$ ist, dann $\lambda I_3 + N$ eine Quadratwurzel hat.

   (c) Sei B eine invertierbare 3×3 Matrix. Zeige, dass B eine Quadratwurzel hat. *Hinweis.* Verwenden Sie Argumente ähnlich denen, die Sie in (a) und (b) verwendet haben, um eine allgemeine Formel für die Quadratwurzel von $\mu I_2 + \widetilde{N}$ zu finden, wobei $\widetilde{N}$ eine 2×2 komplexe nilpotente Matrix ist und μ eine nicht-null komplexe Zahl ist.

Lösung:

(a) Beachten Sie, dass N als nilpotent (d.h., $N^k = 0$ für ein k) nur Null-Eigenwerte hat, sodass sein charakteristisches Polynom $\mathrm{char}_N(t) = -t^3$ ist; nach dem Satz von Cayley-Hamilton schließen wir, dass $N^3 = 0$ (also $k \leqslant 3$) ist. Wir haben dann

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2\right)\left(I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2\right) \\ &= I + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)N + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{8}\right)N^2 \\ &= I + N \end{aligned}$$

wo wir N^3 und höherpotenzierte Terme ignoriert haben, da sie Null sind.

(b) Sei $B = \lambda I + N = \lambda\left(I + \lambda^{-1}N\right)$. Da $\lambda^{-1}N$ auch nilpotent ist, ist eine Quadratwurzel für $(I + \lambda^{-1}N)$ aus (a) $A = I + \frac{\lambda^{-1}}{2} - \frac{\lambda^{-2}}{8}N^2$. Somit erfüllt $C = \lambda^{1/2}A$ die Gleichung

$$C^2 = \lambda A^2 = \lambda\left(I + \lambda^{-1}N\right) = B.$$

(c) Sei J die Jordansche Normalform von B, d.h., $B = QJQ^{-1}$. Aus (b) wissen wir, dass jeder Jordan-Block in J eine Quadratwurzel hat, da alle Eigenwerte von B ungleich null sind. Wenn J einen einzigen Jordan-Block enthält, sind wir mit (a) und (b) fertig.

Jeder Jordan-Block J_λ der Größe 1 hat eine Quadratwurzel. Tatsächlich ist $\sqrt{\lambda}$ eine Quadratwurzel für diesen Block.

Wir zeigen nun, dass jeder Jordan-Block J_λ der Größe 2 mit $\lambda \neq 0$ eine Quadratwurzel hat. Sei $\widetilde{N}$ eine nilpotente 2×2 Matrix. Dann ist, ähnlich wie in (a), das charakteristische Polynom $\mathrm{char}_{\widetilde{N}}(t) = t^2$. Daher ist $\widetilde{N}^2 = 0$. Durch Ausprobieren finden wir schnell, dass

$$A = I + \frac{1}{2}\widetilde{N}$$

eine Quadratwurzel von $I + \widetilde{N}$ ist. Dann zeigen wir, ähnlich wie bei (b), dass für jedes nicht verschwindende $\lambda \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$C = \lambda^{\frac{1}{2}} \left(I + \frac{1}{2}\lambda^{-1}\widetilde{N} \right)$$

eine Quadratwurzel von $\lambda I_2 + \widetilde{N}$ ist.

Dies deckt alle möglichen Arten von Blöcken ab, die in der JNF einer invertierbaren 3×3 Matrix auftreten können. Beachten Sie zusätzlich, dass jede Kombination dieser Quadratwurzeln als diagonale Blöcke einer 3×3 Matrix angeordnet werden kann. Somit können wir diese Quadratwurzeln kombinieren, um eine Quadratwurzel L für J zu erhalten. Definieren wir $D = QLQ^{-1}$. Dann gilt

$$D^2 = QL^2Q^{-1} = QJQ^{-1} = B.$$

6. Angenommen, eine Matrix $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$ hat das folgende charakteristische Polynom. Finde alle möglichen JNFs (Jordan Normalformen) von A unter Umordnung der Jordan-Blöcke.

   (a) $(x-1)^2(x+2)^2$,

   (b) $(x-1)^3(x+2)$.

   Lösung:

   (a) Die Jordan-Normalform muss Diagonaleinträge haben, die aus zwei 1'en und zwei -2'en bestehen. Die einzige Wahl besteht darin, ob für jede Eigenwerteinheit ein einzelner Jordan-Block der Größe 2 oder zwei Blöcke der Größe 1 vorhanden sind. Es gibt also vier Möglichkeiten:

$$\begin{aligned}
&J_1^{(1)} \oplus J_1^{(1)} \oplus J_{-2}^{(1)} \oplus J_{-2}^{(1)}, \\
&J_1^{(2)} \oplus J_{-2}^{(1)} \oplus J_{-2}^{(1)}, \\
&J_1^{(1)} \oplus J_1^{(1)} \oplus J_{-2}^{(2)}, \\
&J_1^{(2)} \oplus J_{-2}^{(2)}.
\end{aligned}$$

Diese können auch explizit als Matrizen geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es ist ebenso korrekt, die Jordan-Blöcke in einer anderen Reihenfolge geschrieben zu haben.

(b) Die Jordan-Normalform muss Diagonaleinträge haben, die aus zwei 1'en und zwei -2'en bestehen. Es gibt also vier Möglichkeiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Sei B eine komplexe 5×5-Matrix mit dem Minimalpolynom $(X-3)(X+5)^2$ und dem charakteristischem Polynom $(X-3)^2(X+5)^3$. Bestimme die möglichen Jordanschen Normalformen von B.

   Lösung:

   Da B das charakteristische Polynom $(X-3)^2(X+5)^3$ besitzt, hat der Eigenwert 3 algebraische Vielfachheit 2 und der Eigenwert -5 algebraische Vielfachheit 3.

   Der Faktor $(X-3)$ tritt im Minimalpolynom mit der Potenz 1 auf; der grösste Jordan-Block zum Eigenwert 3 ist also ein 1×1-Block. Daher enthält die Jordan-Normalform genau 2 Jordanblöcke der Grösse 1×1 zum Eigenwert 3.

   Der Faktor $(X+5)$ tritt im Minimalpolynom mit der Potenz 2 auf; es existiert also ein Jordanblock zum Eigenwert -5 der Grösse 2×2. Aus Dimensionsgründen folgt, dass es genau einen weiteren Jordanblock der Grösse 1×1 gibt.

   Für die Jordansche Normalform der Matrix B erhalten wir also bis auf Vertauschen der Jordanblöcke als einzige Möglichkeit

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

8. Ein Endomorphismus der Form $\mathrm{id}_V + n$ für einen nilpotenten Endomorphismus n heisst *unipotent*. Analog für quadratische Matrizen. Sei $\mathbb{Q} \subset K$. Zeige:

   (a) Für jeden nilpotenten Endomorphismus n ist

$$\exp(n) := {\sum_{m \geqslant 0}}' \frac{n^m}{m!}$$

   wohldefiniert und unipotent.

   (b) Für jeden unipotenten Endomorphismus u ist

$$\log(u) := {\sum_{k \geqslant 1}}' (-1)^{k-1} \frac{(u - \mathrm{id}_V)^k}{k}$$

   wohldefiniert und nilpotent.

   (c) Für jeden nilpotenten Endomorphismus n gilt $\log(\exp(n)) = n$.

   (d) Für jeden unipotenten Endomorphismus u gilt $\exp(\log(u)) = u$.

   Lösung:

(a) Nach Voraussetzung existiert ein $p \geqslant 1$ mit $n^p = 0$. Dann gilt auch $n^m = 0$ für alle $m \geqslant p$. Somit ist die Summe in der Definition von $\exp(n)$ endlich. Der Ausdruck ist also wohldefiniert. Weiter ist

$$\exp(n) - \mathrm{id}_V = \sum_{m=1}^{p-1} \frac{n^m}{m!} \,.$$

Da die Endomorphismen $n^m/m!$ für alle $1 \leqslant m \leqslant p$ nilpotent sind und miteinander kommutieren, folgt aus Aufgabe **??** und einem Induktionsargument, dass auch $\exp(n) - \mathrm{id}_V$ nilpotent ist. Der Endomorphismus $\exp(n)$ ist also unipotent.

(b) Nach Voraussetzung ist die Abbildung $n := u - \mathrm{id}_V$ nilpotent. Damit ist die Summe in der Definition von $\log(u)$ endlich und folglich wohldefiniert. Sei $p \geqslant 1$ mit $n^p = 0$, also $n^m = 0$ für alle $m \geqslant p$. Dann ist $\log(u) = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} n^k/k$ eine endliche Summe von miteinander kommutierenden nilpotenten Matrizen, also wie in Teil (a) wieder nilpotent.

(d) Sei u ein beliebiger unipotenter Endomorphismus und sei $n := u - \mathrm{id}_V$ der zugehörige nilpotente Endomorphismus. Sei $p \geqslant 1$ mit $n^p = 0$ und $(\log(\mathrm{id}_V + n))^p = 0$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) = \sum_{m \geqslant 0} \frac{x^m}{m!}$$

und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$\log(1 + x) = \sum_{k \geqslant 1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \,.$$

Somit ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$

$$\begin{aligned} 1 + x &= \exp(\log(1 + x)) \\ &= \sum_{m \geqslant 0} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k \geqslant 1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right)^m \,. \end{aligned}$$

Definiere das Polynom

$$p(X) := \sum_{0 \leqslant m < p} \frac{1}{m!} \left(\sum_{1 \leqslant k < p} (-1)^{k-1} \frac{X^k}{k} \right)^m \,.$$

Für alle $k < p$ stimmt der Koeffizient von X^k mit dem Koeffizienten von X^k in der Taylorreihe von $\exp(\log(1 + x))$ überein. Aus (**??**) und dem Identitätssatz für Potenzreihen folgt also

$$p(X) = 1 + X + X^p q(X)$$

für ein Polynom $q(X)$. Wir schliessen

$$\begin{aligned}\exp(\log(\mathrm{id}_V + n)) &= \sum_{0\leqslant m<p} \frac{1}{m!}\log(1+n)^m \\ &= \sum_{0\leqslant m<p} \frac{1}{m!}\left(\sum_{1\leqslant k<p}(-1)^{k-1}\frac{n^k}{k}\right)^m \\ &= p(n) \\ &= 1+n+n^p q(n) \\ &= 1+n\,.\end{aligned}$$

(c) Die Aussage $\log(\exp(n)) = n$ für alle nilpotenten Endomorphismen n folgt mit dem analogen Argument aus der Entwicklung von $\log(\exp(x))$ im Bereich $|\exp(x)-1| < 1$.