Musterlösung Serie 21

Skalarprodukt, Orthogonalität

1. (a) Angenommen $\theta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

orthonormale Basen von $\mathbb{R}^2$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass jede orthonormale Basis von $\mathbb{R}^2$ eine der Formen in (a) hat.

Lösung:

(a) Man kann leicht überprüfen, dass jeder der vier Vektoren die Norm $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ hat, was gleich 1 ist. Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} \langle(\cos\theta, \sin\theta), (-\sin\theta, \cos\theta)\rangle &= -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0 \\ \langle(\cos\theta, \sin\theta), (\sin\theta, -\cos\theta)\rangle &= \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta = 0, \end{aligned}$$

was zeigt, dass sie orthogonal sind.

(b) Offensichtlich können wir für beliebige v und u in $\mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = \|u\| = 1$ schreiben $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ und $u = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ für einige Winkel θ und α. Wenn v, u eine Orthonormalbasis ist, dann muss gelten

$$\begin{aligned} 0 = \langle v, u\rangle &= \langle(\cos\theta, \sin\theta), (\cos\alpha, \sin\alpha)\rangle \\ &= \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha \\ &= \cos(\theta - \alpha). \end{aligned}$$

Eine Lösung ist, θ und α so zu wählen, dass $\alpha = \theta + \frac{\pi}{2}$. Dann

$$\begin{aligned} (\cos\alpha, \sin\alpha) &= \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{2}, \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \\ &= (-\sin\theta, \cos\theta). \end{aligned}$$

Was zeigt, dass v, u von der ersten Form in Teil (a) sind.

2. Betrachten Sie

$$\left\{ A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

und versehen Sie $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit dem in Serie 20 Übung 6 definierten Skalarprodukt. Finden Sie eine orthonormale Basis von $\mathrm{LH}(A_1, A_2)$.

Lösung: Das betreffende Skalarprodukt ist ähnlich dem Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$. Wir beginnen damit, A_1 zu normieren:

$$W_1 := \frac{1}{2} A_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der zweite Schritt besteht darin,

$$B_2 = A_2 - \mathrm{Tr}(A_2^T W_1) W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 3/2 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

Nun normieren wir B_2:

$$W_2 := \frac{1}{3} B_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\{W_1, W_2\}$ eine orthonormale Basis von $\mathrm{LH}(A_1, A_2)$.

3. Seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $S \subset V$ ein Orthonormalsystem. Zeige, dass sich S zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen lässt.

Lösung: Schreibe $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ und ergänze $(v_1, \ldots, v_m)$ zu einer geordneten Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V. Wende Gram-Schmidt-Orthogonalisierung darauf an mit dem Resultat $(b_1, \ldots, b_n)$. Die Konstruktion impliziert dann $(b_1, \ldots, b_m) = (v_1, \ldots, v_m)$; folglich ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis von V, welche S enthält.

Aliter: Nach Annahme ist S eine Orthonormalbasis des Unterraums $U := \langle S \rangle$. Da V endlich-dimensional ist, gilt $V = U \oplus U^\perp$. Dabei ist $U^\perp$ wieder endlich-dimensional und besitzt daher eine Orthonormalbasis T. Nach der Vorlesung ist dann $S \cup T$ eine Orthonormalbasis von V.

4. Ein Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei aufgespannt von den beiden Vektoren $v_1 = (1,1,1)^T$ und $v_2 = (0,2,1)^T$.

   (a) Bestimme je eine Orthonormalbasis von U und von $U^\perp$.

   (b) Berechne die Darstellungsmatrizen der orthogonalen Projektionen $\mathbb{R}^3 \to U$ und $\mathbb{R}^3 \to U^\perp$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und der jeweiligen Basis aus (a).

   Lösung:

   (a) Ein einfacher Weg, Orthonormalbasen von U und $U^\perp$ gleichzeitig zu bestimmen, ist die Anwendung der Gram-Schmidt-Orthonormalisierung auf die Vektoren v_1, v_2 sowie einen zusätzlichen Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$, der die beiden zu einer Basis ergänzt, beispielsweise $v_3 = (1,0,0)^T$. Man erhält damit

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

   Also ist (w_1, w_2) eine Orthonormalbasis von U und w_3 eine von U^T.

   Alternativ ermittelt man mit Gram-Schmidt für die Vektoren (v_1, v_2) eine Orthonormalbasis (w_1, w_2) von U, und löst unabhängig davon das lineare Gleichungssystem $\langle v_1, w\rangle = \langle v_2, w\rangle = 0$ um einen Basisvektor u' von U^T zu bestimmen, so dass dann $w_3 := u'/\|u'\|$ eine Orthonormalbasis von U^T ist.

   (b) Die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf U ist gegeben durch die Formel

$$v \mapsto \langle w_1, v\rangle w_1 + \langle w_2, v\rangle w_2.$$

   Ihre Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) von $\mathbb{R}^3$ und der Basis (w_1, w_2) von U ist gleich

$$\big(\langle e_j, w_i\rangle\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\ 1\leqslant j\leqslant 3}} \;=\; (w_1|w_2)^T \;=\; \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}.$$

   Analog erhält man für die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf $U^\perp$ die Matrix

$$\big(\langle e_j, w_3\rangle\big)_{1\leqslant j\leqslant 3} \;=\; w_3^T \;=\; \begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

5. Zeige die folgende Behauptung:

   Satz. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit innerem Produkt. Nehme an, dass $T \in \operatorname{Hom}(V)$. Wenn T eine obere Dreiecksmatrix bezüglich einer Basis von V hat, dann hat T eine obere Dreiecksmatrix bezüglich einer orthonormalen Basis von V.*

   Beweis. Angenommen, T hat eine obere Dreiecksmatrix bezüglich einiger Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V. Somit ist $\mathrm{LH}\,(v_1, \dots, v_j)$ für jedes $j = 1, \dots, n$ unter T invariant. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf $v_1, \dots, v_n$ an und erzeugen Sie eine Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n$ von V. Da

   $$\mathrm{LH}\,(e_1, \dots, e_j) = \mathrm{LH}\,(v_1, \dots, v_j)$$

   für jedes j ist, folgern wir, dass $\mathrm{LH}\,(e_1, \dots, e_j)$ für jedes $j = 1, \dots, n$ unter T invariant ist. Somit hat T eine obere Dreiecksmatrix bezüglich der Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n$.

   □

6. Für jeden der folgenden Vektorräume V mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ soll die Menge $U^\perp$ für die gegebene Teilmenge U gefunden werden.

   (a) Betrachte zuerst

   $$V_1 = \left\{ (a_0, a_1, a_2, \dots) \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}, \quad \langle (a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n,$$

   $$U_1 = \{(a_n)_{n=0}^\infty \in V \mid \exists N \geqslant 0 \text{ sodass } \forall m \geqslant N : a_m = 0\}$$

   (b) Zweitens betrachte

   $$V_2 = C([0,1]), \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx,$$

   $$U_2 = \left\{ f \in V \mid \int_0^{1/2} f(x) dx = 0 \right\}.$$

   Solutions:

   (a) Für $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ schreiben wir $s^{(i)}$ für die Folge, deren Elemente alle 0 sind, ausser dem i-ten Element, welches 1 ist. Für alle $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ ist dann $s^{(i)} \in U$. Sei $b = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \in U^\perp$. Per Definition gilt für jedes $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$

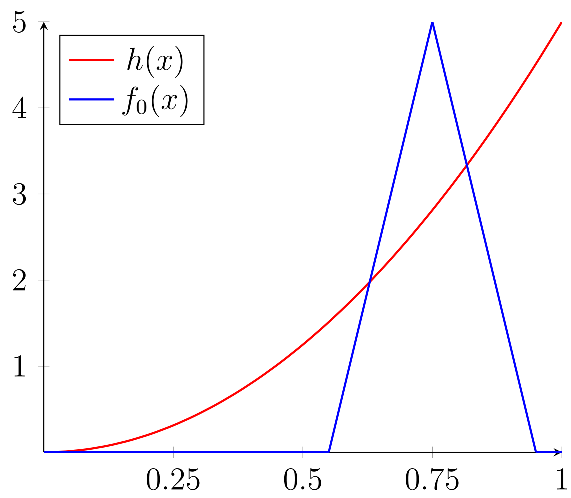
   $$\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(i)} b_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b_i = 0.$$

   Da dies für alle Indizes i gilt, folgt $b = 0_V$. Da b ein beliebiges Element von $U^\perp$ ist, erhalten wir $U^\perp = \{0_V\}$.

(b) Bemerke zunächst, dass jede Funktion $h \in U^\perp$ auf $[1/2, 1]$ verschwindet. Um dies zu sehen nehme an, dass $h \in U^\perp$ nicht auf $[1/2, 1]$ verschwände. Aus der Stetigkeit von h folgte dann die Existenz von $x_0 \in (1/2, 1)$ und $n \in \mathbb{N}$ so, dass h sein Vorzeichen im Intervall $(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$ nicht ändert und sodass dieses in $(1/2, 1)$ enthalten wäre. Sei f_0 die stückweise lineare Funktion definiert durch

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, x_0 - \frac{1}{n}\right] \\ n, & x = x_0 \\ 0, & x \in \left[x_0 + \frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Beispiel für $h(x) = 5x^2$, $x_0 = 3/4$, $n = 5$.



Dann wäre $f_0 \in U$. Es folgte

$$\left| \int_0^1 f_0(x)h(x)dx \right| = \left| \int_{x_0-1/n}^{x_0+1/n} f_0(x)h(x)dx \right| > 0,$$

da der Integrand sein Vorzeichen $\left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right]$ in nicht wechselte. Dies wäre ein Widerspruch zu $h \in U^\perp$.

Als nächstes zeigen wir, dass jedes $g \in U^\perp$ auf $[0, 1/2]$ konstant ist. Seien $a, b \in (0, 1/2)$ mit $a < b$. Dann existiert $N(a, b) \in \mathbb{N}$, sodass für alle ganzahligen $n \geqslant N(a, b)$ die stückweise lineare Funktion f_n definiert wie folgt in V enthalten ist:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, a - \frac{1}{n}\right] \\ n, & x = a \\ 0, & x \in \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \\ -n, & x = b \\ 0, & x \in \left[b + \frac{1}{n}, 1/2\right] \end{cases}$$

Da das Integral von f_n auf $[0, 1/2]$ trivial ist, gilt $f_n \in U$. Sei $g \in U^\perp$. Dann ist

$$\int_0^{1/2} f(x)g(x)dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{a-1/n}^{a+1/n} f_n(x)g(x) = -\int_{b-1/n}^{b+1/n} f_n(x)g(x)dx.$$

Im Fall $n \to +\infty$ konvergiert die zweite Gleichung zu $g(a) = g(b)$. Wir zeigen die Konvergenz der linken Seite der entsprechenden zu $g(a)$ (die Konvergenz rechte Seite lässt sich ähnlich zeigen). Da g in a stetig ist, existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass

$$|x - a| < \delta \implies |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

Sei nun n so, dass $1/n < \delta$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{a-1/n}^{a+1/n} f_n(x)g(x)dx - \int_{a-1/n}^{a+1/n} f_n(x)g(a)dx \right| \\
= \quad & \left| \int_{a-1/n}^{a+1/n} f_n(x)(g(x) - g(a))dx \right| \\
\leqslant \quad & \int_{a-1/n}^{a+1/n} f_n(x) \left| g(x) - g(a) \right| dx \\
< \quad & \varepsilon \int_{a-1/n}^{a+1/n} \left| f_n(x) \right| dx \\
= \quad & \varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass f_n auf $[a - 1/n, a + 1/n]$ zu 1 integriert, um die letzte Gleichung zu erhalten. Wenn wir ε gegen 0 gehen lassen, zeigt dies die gewünschte Konvergenz.

Da g stetig ist und a und b beliebig gewählt waren, muss g auf $[0, 1/2]$ konstant sein. Da g auf $[1/2, 1]$ verschwindet folgt aus seiner Stetigkeit, dass g auf dem Intervall $[0, 1]$ verschwindet. Also ist $U^\perp = \{0_V\}$.

Single Choice. Pro Aufgabe ist genau eine Antwort korrekt.

1. Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und der dazugehörigen Norm $\|\ \|$. Für welche Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$?

   ○ $v = \binom{1}{1},\ w = \binom{1}{0}$
   ○ $v = \binom{2}{1},\ w = \binom{1}{2}$
   ○ $v = \binom{2}{3},\ w = \binom{3}{1}$
   ✓ $v = \binom{1}{2},\ w = \binom{2}{4}$

   Erklärung: Die Gleichheit gilt genau dann, wenn einer der Vektoren ein nichtnegatives Vielfaches des anderen ist. Also ist nur (d) richtig. Alternativ zeigt dies eine direkte Rechnung.

2. Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $v_1, v_2, v_3 \in V$. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   ✓ Aus $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$ folgt $v_1 \perp v_3$.
   ○ Aus $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$ folgt $v_1 \perp (v_2 + v_3)$.
   ○ Aus $v_1 \perp v_2$ folgt $v_1 \perp -v_2$.
   ○ Aus $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$ folgt $v_1 \perp v_3$.

   Erklärung: Für $v_1 = v_3 \neq 0 = v_2$ ist Aussage (a) falsch. Die übrigen Aussagen folgen aus der Bilinearität des Skalarproduktes.

3. Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $S, T \subset V$ zwei Teilmengen. Welche der folgenden Eigenschaften ist im allgemeinen nicht äquivalent zu den anderen?

   ○ $S \subset T^\perp$
   ○ $T \subset S^\perp$
   ○ $S \perp T$
   ✓ $\langle S\rangle \cap \langle T\rangle = \{0\}$

   Erklärung: Es ist $S \perp T$ genau dann, wenn S in der Menge $T^\perp = \{v \in V \mid v \perp T\}$ enthalten ist. Also ist (c) äquivalent zu (a), und aus demselben Grund auch zu (b). Dagegen sind die Teilmengen $S := \{\binom{1}{0}\}$ und $T := \{\binom{1}{1}\}$ von $V = \mathbb{R}^2$ nicht orthogonal zueinander, erfüllen aber die Bedingung (d).

4. Sei S eine Teilmenge eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums V. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   ○ $(S^\perp)^\perp = \langle S \rangle$.

   ✓ S ist das orthogonale Komplement eines Unterraumes von V.

   ○ $S^\perp$ ist ein Unterraum von V.

   ○ $V = S^\perp \oplus (S^\perp)^\perp$.

   Erklärung: Das orthogonale Komplement eines Unterraumes von V ist immer ein Unterraum. Sofern also S kein Unterraum ist, ist Aussage (b) falsch. Die übrigen Aussagen wurden in der Vorlesung bewiesen.

Multiple Choice Fragen.

1. Welche der folgenden Matrizen sind hermitesch?

   ✓ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   ○ $\frac{1}{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   ○ $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} i & -2 \\ 2 & i \end{pmatrix}$

   ✓ $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

   Explanation: Überprüfe, dass $A^* = A$.

2. Welche der folgenden Matrizen sind unitär?

   ○ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   ✓ $\frac{1}{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   ○ $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} i & -2 \\ 2 & i \end{pmatrix}$

   ✓ $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

   Explanation: Überprüfe, dass $U^*U = \mathbf{1}$, äquivalent: die Spalten bilden eine Orthonormalbasis.

3. Seien U, V unitäre $n \times n$ Matrizen, $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Welche Aussagen sind allgemein korrekt?

   ○ $U + V$ ist unitär.
   Explanation: Falsch. $-U$ ist auch unitär. $0 = U + (-U)$ aber nicht.

   ✓ λU ist unitär.
   Explanation: Wahr. Da $|\lambda| = 1$, ist $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$. Somit $(\lambda U)^* = \overline{\lambda}U^* = \lambda^{-1}U^{-1} = (\lambda U)^{-1}$.

   ✓ U^{-1} ist unitär.
   Explanation: Wahr. $(U^{-1})^* = (U^*)^{-1} = (U^{-1})^{-1} = U$.

   ✓ UV ist unitär.
   Explanation: Wahr. $(UV)^* = V^*U^* = V^{-1}U^{-1} = (UV)^{-1}$.