# Musterlösung Serie 22

## QR-Zerlegung, Dualräume

1. Berechne eine Zerlegung $A = QR$ der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
in eine orthogonale Matrix $Q$ und eine rechte obere Dreiecksmatrix $R$. Verwende diese Zerlegung, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (0, 3, -3)^T$ zu lösen.

   *Lösung*: Mit dem Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren findet man die gesuchten Matrizen
$$Q = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Durch Multiplikation der Gleichung $Ax = QRx = b$ von links mit der invertierbaren Matrix $Q^{-1} = Q^T$ erhält man das äquivalente Gleichungssystem $Rx = Q^T b = (4, 1, -1)^T$. Da $R$ obere Dreiecksgestalt hat, erhält man hieraus schnell die Lösung $x = (2, 1, -1)^T$.

2. Berechne eine QR-Zerlegung von
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   *Lösung:* Wir wenden Gram-Schmidt auf die Spalten von $A$ an und erhalten eine orthogonale Basis $(v_1, v_2, v_3)$. Der Algorithmus liefert
$$v_1 = A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$v_2 = A^{(2)} - \frac{\langle v_1, A^{(2)} \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$v_3 = A^{(3)} - \frac{\langle v_1, A^{(3)} \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, A^{(3)} \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen rekursiv die Formeln ein und erhalten

$$\begin{aligned}
v_1 &= A^{(1)} \\
v_2 &= -\frac{1}{2}A^{(1)} + A^{(2)} \\
v_3 &= -\frac{1}{3}A^{(1)} - \frac{1}{3}A^{(2)} + A^{(3)}.
\end{aligned}$$

Normierung liefert die ONB $(w_1, w_2, w_3)$ mit $w_i = \frac{1}{\|v_i\|}v_i$ $(i = 1, 2, 3)$, wobei

$$\|v_1\| = \sqrt{2}, \quad \|v_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \|v_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Gegeben Vektoren $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n \in \mathbb{K}^m$ sei $(\tilde{v}_1|\cdots|\tilde{v}_n) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ die Matrix, deren $j$-te Spalte gleich $\tilde{v}_j$ ist. Dann folgt aus obiger Rechnung

$$A\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (v_1\,|v_2|\,v_3) = (w_1\,|w_2|\,w_3)\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Mittels Gausselimination berechnet man

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2+\frac{1}{3}Z_3]{Z_1+\frac{1}{3}Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{Z_1+\frac{1}{2}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und es folgt

$$\begin{aligned}
A &= (w_1\,|w_2|\,w_3)\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Sei $A \in O_n(\mathbb{R})$. Zeige, dass es einen eindeutigen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $A|_U = \mathrm{id}_U$ und $A(U^\perp) \subset U^\perp$ ist und $A|_{U^\perp}$ keine Fixpunkte ausser $0 \in U^\perp$ hat.

   *Lösung:* Sei $U$ der Eigenraum von $A$ zum Eigenwert 1 (insbesondere $U = \{0\}$ falls 1 kein Eigenwert von $A$ ist). Dann erfüllt $U$ die Behauptungen. In der Tat gilt per

Definition dass $A|_U = \mathrm{id}_U$ ist. Sei nun $w \in U^\perp$, also $\langle u, w\rangle = 0$ für alle $u \in U$, wobei $\langle , \rangle$ das euklidische Skalarprodukt von $\mathbb{R}^n$ ist. Dann gilt aber

$$0 = \langle u, w\rangle = \langle Au, Aw\rangle = \langle u, Aw\rangle,$$

da $A$ orthogonal ist und $u$ laut Voraussetzung invariant unter $A$. Da dies für alle $u \in U$ gilt, folgt also $Aw \in U^\perp$, dh. $A(U^\perp) \subset U^\perp$. Wäre nun $w \in U^\perp \setminus \{0\}$ ein Fixpunkt, dh. $Aw = w$, dann wäre es ein Eigenvektor zum Eigenwert 1, dh. $w \in U$. Das ist ein Widerspruch da $U \cap U^\perp = \{0\}$ ist.
Nehmen wir nun an wir hätten einen weiteren Teilraum $W$ mit den Eigenschaften aus der Aufgabe. Die Bedingung $A|_W = \mathrm{id}_W$ ist äquivalent dazu, dass $W$ im Eigenraum von $A$ zum Eigenwert 1 enthalten ist, also $W \subset U$. Wäre $W$ ein echter Teilraum von $U$ so gäbe es einen Vektor $0 \neq w \in U$ senkrecht zu $W$. Dann ist $w$ ein Fixpunkt von $A$, der in $W^\perp \setminus \{0\}$ enthalten ist, ein Widerspruch.

4. Sei $V = C([-1,1], \mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$ mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

für $f, g \in V$. Sei $\varphi : V \to \mathbb{R}$ das lineare Funktional definiert durch $\varphi(f) = f(0)$. Zeige, dass kein $g \in V$ existiert, sodass

$$\forall f \in V : \varphi(f) = \langle f, g\rangle$$

ist.

*Warum ist dies kein Gegenbeispiel zu Theorem 15.7.3 der Vorlesung?*

*Lösung*: Nehme an, dass ein solches $g \in V$ existiert. Sei $f_0 \equiv 1$ auf dem Intervall $[-1,1]$. Dann wäre

$$1 = f_0(0) = \langle f_0, g\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot g(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x)dx.$$

Also existierte ein $x_0 \in (-1,1)$ mit $g(x_0) > 0$ und, da $g$ stetig wäre, existierte ein offenes Intervall $U_0$ mit $x_0 \in U_0$, sodass $g(x) > 0$ auf $U_0$ wäre. Indem wir $U_0$ wenn nötig schrumpfen, könnten wir annehmen, dass 0 nicht im Abschluss von $U_0$ enthalten wäre. Per Definition wäre $h(0) = 0$.

Definiere $h \in V$ als stetige Funktion auf $[-1,1]$, welche auf einem Subinterval $U_1$ von $U_0$ strikt positv wäre und überall sonst verschwände, zum Beispiel als stückweise lineare Funktion wie in Aufgabe 6.(b) der 21. Serie.

Dann wäre

$$0 = h(0) = \langle h, g\rangle = \int_{-1}^{1} h(x)g(x)dx = \int_{U_1} h(x)g(x) > 0.$$

Die ist ein Widerspruch und zeigt somit, dass $g$ nicht existiert.

Das widerspricht nicht dem Theorem 15.7.3, da dieser Satz nur für endlich dimensionale Räume gilt.

5. Für einen endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ betrachte den Isomorphismus

$$\delta\colon V \to V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}),\ v \mapsto \delta(v) := \langle v, \cdot\rangle.$$

   (a) Zeige, dass genau ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle^*$ auf $V^*$ existiert, so dass $\delta$ eine Isometrie ist.

   (b) Sei $B$ eine geordnete Basis von $V$, und sei $B^*$ die zugehörige duale Basis von $V^*$. Gib die Darstellungsmatrix von $\langle\ ,\ \rangle^*$ bezüglich $B^*$ in Termen der Darstellungsmatrix von $\langle\ ,\ \rangle$ bezüglich $B$ an.

*Lösung*:

(a) Die Abbildung $\delta$ ist eine Isometrie für das gesuchte Skalarprodukt $\langle\, ,\rangle^*$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall v, w \in V\colon\ \langle\delta(v), \delta(w)\rangle^* = \langle v, w\rangle\,. \tag{1}$$

Da $\delta$ bijektiv ist, existiert genau eine Abbildung $\langle\, ,\rangle^*$ mit dieser Eigenschaft. Definieren wir also $\langle\, ,\rangle^*$ durch die Beziehung (1) oder, äquivalenterweise, durch

$$\langle\lambda, \mu\rangle^* := \langle\delta^{-1}(\lambda), \delta^{-1}(\mu)\rangle$$

für alle $\lambda, \mu \in V^*$, so folgt aus der Linearität und Injektivität von $\delta^{-1}$, dass dies ein Skalarprodukt auf $V^*$ mit der gewünschten Eigenschaft definiert.

(b) Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von $V$ und

$$A \ :=\ [\langle\, ,\rangle]_B \ =\ \big(\langle v_i, v_j\rangle\big)_{i,j}$$

die Darstellungsmatrix von $\langle\, ,\rangle$ bezüglich $B$. Dann ist $\delta(B) := (\delta(v_1), \ldots, \delta(v_n))$ eine geordnete Basis von $V^*$, und nach Konstruktion ist die Darstellungsmatrix von $\langle\, ,\rangle^*$ bezüglich $\delta(B)$ gleich

$$[\langle\, ,\rangle^*]_{\delta(B)} \ =\ \big(\langle\delta(v_i), \delta(v_j)\rangle^*\big)_{i,j} \ =\ \big(\langle v_i, v_j\rangle\big)_{i,j} \ =\ A.$$

Sodann sei $B^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die duale Basis zu $B$. Für alle $j$ und $k$ gilt dann

$$\Big(\sum_i \langle v_j, v_i\rangle\, v_i^*\Big)(v_k) \ =\ \sum_i \langle v_j, v_i\rangle\, v_i^*(v_k) \ =\ \sum_i \langle v_j, v_i\rangle\, \delta_{i,k} \ =\ \langle v_j, v_k\rangle \ =\ \delta(v_j)(v_k).$$

Durch Variieren von $k$ folgt daraus

$$\delta(v_j) \ =\ \sum_i \langle v_j, v_i\rangle\, v_i^*.$$

Also ist die Basiswechselmatrix zwischen $\delta(B)$ und $B^*$ gleich

$$ {}_{B*}[\mathrm{id}_V]_{\delta(B)} \;=\; \big(\langle v_j, v_i\rangle\big)_{i,j} \;=\; A^T \;=\; A. $$

Deren Inverse ist die Basiswechselmatrix

$$ {}_{\delta(B)}[\mathrm{id}_{V*}]_{B*} \;=\; (A^T)^{-1}. $$

Nach der Basiswechselformel aus §10.4 der Vorlesung folgt daraus

$$ \begin{aligned} [\langle\, , \rangle^*]_{B*} &= {}_{\delta(B)}[\mathrm{id}_{V*}]_{B*}^T \cdot [\langle\, , \rangle^*]_{\delta(B)} \cdot {}_{\delta(B)}[\mathrm{id}_{V*}]_{B*} \\ &= ((A^T)^{-1})^T A A^{-1} \;=\; A^{-1} A A^{-1} \;=\; A^{-1}. \end{aligned} $$