Musterlösung Serie 23

Adjungierte Abbildung, Selbstadjungierten und normalen Operatoren

Definition. Ein linear Operator $T : V \to V$ heißt selbstadjungiert, wenn $T = T^*$. Anders ausgedrückt ist $T \in \operatorname{Hom}(V)$ selbstadjungiert genau dann, wenn

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

1. Es seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ und $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ IP Räume über einem Körper $\mathbb{K}$, und es sei $T : V \to W$ linear. Zeige, dass

$$\operatorname{Bild}(T^*) = \ker(T)^\perp \text{ and } \operatorname{Bild}(T) = \ker(T^*)^\perp.$$

Lösung: Sei $v \in \operatorname{Bild}(T^*)$.

$$\begin{aligned} v \in \operatorname{Bild}(T^*) &\implies \exists w \in W : T^*w = v \\ &\implies \forall u \in \ker(T) : \langle v, u \rangle_V = \langle T^*w, u \rangle_V = \langle w, Tu \rangle_W = \langle w, 0 \rangle_W \\ &\implies \forall u \in \ker(T) : \langle v, u \rangle = 0 \\ &\implies v \in \ker(T)^\perp. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite, angenommen, dass $v \in \operatorname{Bild}(T^*)^\perp$. Dann gilt für alle $w \in W$,

$$0 = \langle v, T^*w \rangle = \langle Tv, w \rangle.$$

Daher ist $v \in \ker(T)$. Nun gilt

$$\operatorname{Bild}(T^*)^\perp \subseteq \ker(T) \implies \ker(T)^\perp \subseteq \operatorname{Bild}(T^*).$$

Dies beweist die erste Gleichheit.

Die andere Gleichheit wird durch Vertauschen von T und T^* sowie Vertauschen von V und W im obigen Argument gezeigt.

2. Seien V und W wie oben. Nehme an, dass $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Zeige, dass

   (a) T genau dann injektiv ist, wenn T^* surjektiv ist.

   (b) T genau dann surjektiv ist, wenn T^* injektiv ist.

Lösung:

(a) T ist injektiv $\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Bild}(T^*) = \ker(T)^\perp = V$.

(b) T ist surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Bild}(T) = W \Leftrightarrow \ker(T^*) = \mathrm{Bild}(T)^\perp = \{0\}$.

3. Sei K ein Körper und sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler K-Skalarproduktraum. Betrachte $T \in \mathrm{End}(V)$ und einen Unterraum U von V. Zeige, dass U invariant unter T ist genau dann wenn $U^\perp$ invariant unter T^* ist.

   Solution: Nehme zunächst an, dass U invariant unter T ist. Dann gilt für jedes $u \in U$ und jedes $w \in U^\perp$,

   $$0 = \langle Tu, w\rangle = \langle u, T^*w\rangle.$$

   Für alle $w \in U^\perp$ ist also $T^*w \in U^\perp$.

   Nehme nun andererseits an, dass $U^\perp$ invariant unter T^* ist. Seien $w \in U^\perp$ und $u \in U$. Es gilt

   $$0 = \langle u, T^*w\rangle = \langle Tu, w\rangle.$$

   Für alle $u \in U$ ist also $Tu \in (U^\perp)^\perp = U$. Hier haben wir die endlichdimensionalität von V benutzt.

4. (a) Geben Sie ein Beispiel für einen Operator $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^2)$ an, der nicht normal ist. Erklären Sie sorgfältig, warum es sich nicht um einen normalen Operator handelt.

   (b) Geben Sie ein Beispiel für einen diagonalisierbaren Operator $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^2)$ an, der nicht normal ist.

   (c) Geben Sie ein Beispiel für einen Operator $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^3)$ an, der normal, aber nicht selbstadjungiert ist.

   (d) Geben Sie ein Beispiel für einen Operator $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2)$ an, der diagonalisierbar, aber nicht selbstadjungiert ist.

   (e) Überprüfen Sie, ob der Operator

   $$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v \end{aligned}$$

   normal ist. Erklären Sie, warum er nicht selbstadjungiert ist.

   Lösung:

   (a) Jeder nicht-diagonalisierbare Operator wird funktionieren. Zum Beispiel,

   $$T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\ v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v.$$

(b) Um einen diagonalisierbaren Operator zu definieren, der nicht normal ist, genügt es, eine Basis von $\mathbb{C}^2$ zu wählen, die nicht bezüglich des Standard-Hermit'schen Skalarprodukts orthonormal ist. Zum Beispiel, ist die Basis $\mathcal{B} = \{e_1, e_1 + e_2\}$ nicht orthogonal. Dann können wir $T \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^2)$ definieren als den eindeutigen linearen Operator, für den $T(e_1) = e_1$ und $T(e_1 + e_2) = -(e_1 + e_2)$. Dies ist offensichtlich diagonalisierbar, aber nicht normal: die Matrix von T bezüglich der standardmäßigen orthonormalen Basis ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da $A^*A \neq AA^*$ kann der Operator nicht normal sein.

(c) Wir können jede orthonormale Basis bezüglich des Standard-Skalarprodukts wählen und dies verwenden, um einen normalen Operator zu definieren. Sei $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis. Dann, um sicherzustellen, dass T nicht selbstadjungiert ist, definieren wir einen Operator mit mindestens einem nicht-realen Eigenwert: Zum Beispiel können wir den eindeutigen Operator $T \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^3)$ wählen, so dass

$$T(e_1) = e_1,\ T(e_2) = -e_2,\ T(e_3) = ie_3.$$

(d) Wir wählen eine Basis von $\mathbb{R}^2$, die nicht bezüglich des Standard-Skalarprodukts orthonormal ist. Zum Beispiel, wählen wir dieselbe wie in (b). Dann definieren wir den diagonalisierbaren Operator $T \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2)$ so, dass $T(e_1) = e_1$ und $T(e_1 + e_2) = -(e_1 + e_2)$.

(e) Der Operator ist nicht selbstadjungiert, weil er keine reellen Eigenwerte hat. Daher ist er nicht diagonalisierbar, was dem Realen Spektralsatz widerspricht.

5. Sei $\mathbb{R}^2$ mit dem Skalarprodukt ausgestattet

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2,\ x, y \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Definieren Sie einen selbstadjungierten Operator T auf dem Skalarproduktraum $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit Eigenwerten $\sqrt{2}, 1$.

(b) Ist der lineare Operator

$$\begin{aligned} T:\ \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v \end{aligned}$$

ein selbstadjungierter Operator auf dem Skalarproduktraum $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$?

Lösung:

(a) Wir müssen eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich des obigen Skalarprodukts finden. Eine Möglichkeit besteht darin, von einer beliebigen Basis aus zu beginnen und Gram-Schmidt zu verwenden. Oder Sie können überprüfen, dass $\mathcal{B} = \{e_2, e_1 + e_2\}$ orthonormal ist. Definieren Sie dann $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2)$ als den eindeutigen Operator, der e_2 auf $\sqrt{2}e_2$ und $e_1 + e_2$ auf sich selbst abbildet. Da T diagonalisierbar ist und seine Eigenvektoren orthonormal sind, muss er selbstadjungiert sein, gemäß dem Realen Spektralsatz.

(b) Wir bestimmen die Matrix von T bezüglich der oben gegebenen orthonormalen Basis: wir finden

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $A \neq A^t$, ist T nicht selbstadjungiert.

6. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit IP. Fixiere $u, x \in V$. Definiere $T \in \mathrm{Hom}(V)$ durch

$$Tv = \langle v, u \rangle x$$

für jedes $v \in V$.

(a) Angenommen, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass T genau dann selbstadjungiert ist, wenn $\{u, x\}$ linear abhängig ist.

(b) Zeigen Sie, dass T genau dann normal ist, wenn $\{u, x\}$ linear abhängig ist.

Lösung: Seien $w_1, w_2 \in V$. Wir haben

$$\begin{aligned} \langle w_1, T^* w_2 \rangle &= \langle Tw_1, w_2 \rangle \\ &= \langle \langle w_1, u \rangle x, w_2 \rangle \\ &= \langle w_1, u \rangle \langle x, w_2 \rangle \\ &= \left\langle w_1, \overline{\langle x, w_2 \rangle} u \right\rangle \\ &= \langle w_1, \langle w_2, x \rangle u \rangle \end{aligned}$$

Daher gilt $T^* v = \langle v, x \rangle u$.

(a) Angenommen, T ist selbstadjungiert. Dann gilt

$$\langle v, u \rangle x - \langle v, x \rangle u = Tv - T^* v = 0,$$

für alle $v \in V$. Wir können annehmen, dass u und x nicht null sind (sonst gibt es nichts zu beweisen). Die Wahl $v = u$ zwingt $\langle v, u \rangle \neq 0$, was zeigt, dass x und u linear abhängig sind. Umgekehrt, nehmen wir an, dass x und u linear abhängig sind. Wir können annehmen, dass x und u nicht null sind, sonst wäre T bereits null, was bereits selbstadjungiert ist. Dann ist $u = cx$ für ein nichtnull $c \in \mathbb{R}$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
Tv &= \langle v, u\rangle x \\
&= \langle v, cx\rangle \frac{1}{c} u \\
&= \langle v, x\rangle u \\
&= T^* v.
\end{aligned}$$

Daher gilt $T = T^*$.

(b) Auch hier können wir annehmen, dass u und x in beiden Beweisrichtungen nicht null sind. Wir haben

$$\begin{aligned}
\langle\langle v, u\rangle x, x\rangle u &= T^*(\langle v, u\rangle x) \\
&= T^*Tv \\
&= TT^*v \\
&= T(\langle v, x\rangle u) \\
&= \langle\langle v, x\rangle u, u\rangle x.
\end{aligned}$$

Die Wahl $v = u$ stellt sicher, dass $\langle\langle v, u\rangle x, x\rangle \neq 0$ ist, was zeigt, dass u und x linear abhängig sind. Umgekehrt, nehmen wir an, dass x und u linear abhängig sind. Dann ist $u = cx$ für ein nichtnull $c \in \mathbb{F}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&= TT^*v \\
&= T(\langle v, x\rangle u) \\
&= \langle\langle v, x\rangle u, u\rangle x \\
&= \langle\langle v, x\rangle x, cx\rangle cx \\
&= \langle\langle v, cx\rangle x, x\rangle cx \\
&= \langle\langle v, u\rangle x, x\rangle u \\
&= T^*(\langle v, u\rangle x) \\
&= T^*Tv.
\end{aligned}$$

Daher gilt $TT^* = T^*T$.

7. Wir machen $\mathbb{R}[x]_2$ durch

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

zu einem Skalarproduktraum. Definiere $T \in \operatorname{End}(\mathbb{R}[x]_2)$ durch $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1x$.

(a) Zeige, dass T nicht selbstadjunigert ist.

(b) Die Darstellungsmatrix von T zur Basis $(1, x, x^2)$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist gleich ihrer konjugierten Transponierten, obwohl T nicht selbstadjungiert ist. Erkläre, warum dies kein Widerspruch ist.

Solution:

(a) Wäre T selbstadjungiert, erhielten wir

$$\langle Tp, q \rangle = \langle p, T^* q \rangle = \langle p, Tq \rangle.$$

Betrachte nun $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ und $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle Tp, q \rangle &= \langle a_1 x, q \rangle \\ &= a_1 \int_0^1 b_0 x + b_1 x^2 + b_2 x^3 dx \\ &= a_1 \left(\frac{b_0}{2} x^2 + \frac{b_1}{3} x^3 + \frac{b_2}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 \\ &= a_1 \left(\frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{4} \right). \end{aligned}$$

Genauso erhalten wir

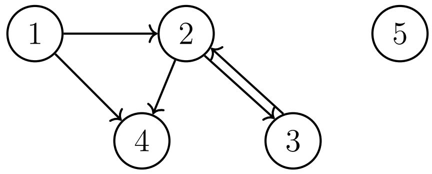
$$\langle p, Tq \rangle = \langle p, b_1 x \rangle = b_1 \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{4} \right)$$

Für $a_1 = 0$ und $b_1, a_0, a_2 > 0$ gilt dann $\langle Tp, q \rangle \neq \langle p, Tq \rangle$.

(b) Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass ein Endomorphism T eines reellen Vektorraums mit innerem Produkt $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist orthogonal diagonalisierbar genau dann wenn er selbstadjungiert ist. Das obige ist kein Widerspruch dazu, da $\{1, x, x^2\}$ keine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}[x]_2$ bezüglich des obigen inneren Produktes ist.

8. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher gerichteter Graph. Genauer, seien V eine endliche Menge und $E \subseteq \{(v_{\text{init}}, v_{\text{term}}) \mid v_{\text{init}}, v_{\text{term}} \in V \wedge v_{\text{init}} \neq v_{\text{term}}\} \subseteq V \times V$. Wir fassen V als Menge der Knoten eines Graphen auf, und $(v_{\text{init}}, v_{\text{term}}) \in E$ als gerichtete Kante $v_{\text{init}} \in V$ zu $v_{\text{term}} \in V$ (wir visualisieren dies, indem wir einen Pfeil zu v_{term} an die Kante zeichnen).

Beispiel eines gerichteten Graphen.



Wir definieren ausserdem Vektorräume $\mathbb{R}^V = \{f : V \to \mathbb{R}\}$ und $\mathbb{R}^E = \{\varphi : E \to \mathbb{R}\}$, welche wir mit den inneren Produkten

$$\langle f_1, f_2 \rangle_V = \sum_{v \in V} f_1(v) f_2(v), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}^V$$
$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_E = \sum_{e \in E} \varphi_1(e) \varphi_2(e), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}^E$$

ausstatten. Ausserdem definieren wir $T : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^E$ als "kombinatorische Ableitung": für $f \in \mathbb{R}^V$ und $e = (v_{\text{init}}, v_{\text{term}}) \in E$, definieren wir

$$T(f)(e) = f(v_{\text{term}}) - f(v_{\text{init}}).$$

Des Weiteren definieren wir $S : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}^V$ durch

$$S(\varphi)(v) = \sum_{\substack{v_{\text{init}} \in V \\ (v_{\text{init}}, v) \in E}} \varphi((v_{\text{init}}, v)) - \sum_{\substack{v_{\text{term}} \in V \\ (v, v_{\text{term}}) \in E}} \varphi((v, v_{\text{term}})).$$

(a) Zeige $T^* = S$ und berechne $T^* \circ T = S \circ T$, was wir auch den kombinatorischen Laplace von G nennen.

(b) Jetzt vereinfachen wir die Situation indem wir nur noch ungerichtete Kanten betrachten, d.h..

$$(v_{\text{init}}, v_{\text{term}}) \in E \Leftrightarrow (v_{\text{term}}, v_{\text{init}}) \in E,$$

und annehmen, dass der Graph d-regular ist (für jedes $v \in V$ existieren genau d Knoten $v_{\text{term}} \in V$ mit $(v, v_{\text{term}}) \in E$). Zeige, dass $T^* \circ T$ den Eigenwert 0 hat. Erkläre, warum die geometrische Vielfachheit von 0 mit dem Zusammenhang von G zu tun hat.

Solution:

(a) Für eine gegebene Kante $e \in E$ schreiben wir $e^{(1)}$ und $e^{(2)}$ für die eindeutigen

Knoten mit $e = (e^{(1)}, e^{(2)})$. Für $f \in \mathbb{R}^V$ und $\varphi \in \mathbb{R}^E$, berechnen wir

$$\begin{aligned}
\langle f, S(\varphi)\rangle_V &= \sum_{v\in V} f(v)S(\varphi)(v) \\
&= \sum_{v\in V} f(v)\left[\sum_{\substack{v_{\text{init}}\in V\\(v_{\text{init}},v)\in E}} \varphi((v_{\text{init}}, v)) - \sum_{\substack{v\in V\\(v,v_{\text{term}})\in E}} \varphi((v, v_{\text{term}}))\right] \\
&= \sum_{v\in V} f(v) \sum_{\substack{v_{\text{init}}\in V\\(v_{\text{init}},v)\in E}} \varphi((v_{\text{init}}, v)) - \sum_{v\in V} f(v) \sum_{\substack{v\in V\\(v,v_{\text{term}})\in E}} \varphi((v, v_{\text{term}})) \\
&= \sum_{e\in E} \sum_{\substack{v\in V\\v=e^{(2)}}} f(v)\varphi(e) - \sum_{e\in E} \sum_{\substack{v\in V\\v=e^{(1)}}} f(v)\varphi(e)
\end{aligned}$$

Da $e^{(1)}$ and $e^{(2)}$ für ein fixes $e \in E$ eindeutig sind, ist die letze Zeile gleich

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in E} f(e^{(2)})\varphi(e) - \sum_{e\in E} f(e^{(1)})\varphi(e) &= \sum_{e\in E} (f(e^{(2)}) - f(e^{(1)}))\varphi(e) \\
&= \sum_{e\in E} T(f)(e)\varphi(e) \\
&= \langle Tf, \varphi\rangle_E .
\end{aligned}$$

Per Definition der Adjungierten Abbildung zeigt dies $T^* = S$.
Es gilt

$$\begin{aligned}
S(T(f))(v) &= \sum_{\substack{v_{\text{init}}\in V\\(v_{\text{init}},v)\in E}} T(f)((v_{\text{init}}, v)) - \sum_{\substack{v_{\text{term}}\in V\\(v,v_{\text{term}})\in E}} T(f)((v, v_{\text{term}})) \\
&= \sum_{\substack{v_{\text{init}}\in V\\(v_{\text{init}},v)\in E}} [f(v) - f(v_{\text{init}})] - \sum_{\substack{v_{\text{term}}\in V\\(v,v_{\text{term}})\in E}} [f(v_{\text{term}}) - f(v)] \\
&= E_v f(v) - \sum_{\substack{v_{\text{init}}\in V\\(v_{\text{init}},v)\in E}} f(v_{\text{init}}) - \sum_{\substack{v_{\text{term}}\in V\\(v,v_{\text{term}})\in E}} f(v_{\text{term}}) \\
&= E_v f(v) - \sum_{\substack{w\in V\\w \text{ is a neighbour of } v}} f(w).
\end{aligned}$$

wobei E_v die Zahl der Kanten ist, welche v berühren.

(b) Die Lösung der Aufgabe lässt sich vorzugsweise mit der Matrixdarstellung des kombinatorischen Laplace $T^* \circ T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^V)$ aufschreiben. Schreiben wir für die Knoten V (in beliebiger Reihenfolge) $v_1, \ldots, v_n$. Die Menge der charakteristischen Funktionen

$$\mathcal{B} := \{\mathbf{1}_{x=v_i}(x) \in \mathbb{R}^V \mid i = 1, \ldots, n\}$$

mit

$$\mathbf{1}_{x=v_i}(x) = \begin{cases} 1, & x = v_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

bildet eine Orthnormalbasis von $(\mathbb{R}^V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$. Also ist die Matrixdarstellung von $T^* \circ T$ eine quadratische $n \times n$ Matrix deren Zeilen, bzw. Spalten durch $v_1, \ldots, v_n$ indiziert sind, bzw durch $\mathbf{1}_{x=v_1}, \ldots, \mathbf{1}_{x=v_n}$, in dieser Reihenfolge.

Sei $v \in V$ ein beliebiger Knoten. Wir schreiben $N(v)$ für die Menge der zu v benachbarten Knoten und berechnen

$$\begin{aligned}
& (T^* \circ T)(\mathbf{1}_{x=v})(x) \\
= & \sum_{\substack{v_{\text{init}} \in V \\ (v_{\text{init}}, x) \in E}} [\mathbf{1}_{x=v}(x) - \mathbf{1}_{x=v}(v_{\text{init}})] - \sum_{\substack{v_{\text{term}} \in V \\ (x, v_{\text{term}}) \in E}} [\mathbf{1}_{x=v}(v_{\text{term}}) - \mathbf{1}_{x=v}(x)] \\
= & \sum_{w \in N(x)} [\mathbf{1}_{x=v}(x) - \mathbf{1}_{x=v}(w)] - \sum_{w \in N(x)} [\mathbf{1}_{x=v}(w) - \mathbf{1}_{x=v}(x)] \\
= & 2d\mathbf{1}_{x=v}(x) - 2 \sum_{w \in N(x)} \mathbf{1}_{x=v}(x) \\
= & \begin{cases} 2d, & x = v \\ -2, & x \in N(v) \end{cases}
\end{aligned}$$

Der Faktor 2 ist darauf zurückzuführen, dass wir nicht mehr mit einem gerichteten Graphen arbeiten. Die Elemente von $[T^* \circ T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ können also wie folgt beschrieben werden:

$$([T^* \circ T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}})_{i,j} = \begin{cases} 2d, & i = j \\ -2, & v_i \in N(v_j) \end{cases}$$

Bemerke, dass die zuletzt berechnete Matrix symmetrisch ist. Es lässt sich leicht zeigen, dass die konstante Funktion, welche jeden Knoten auf 1 abbildet und durch den Koordinatenvektor $(1, 1, \cdots, 1)^T$ repräsentiert wird, der Kern von $(T^* \circ T)$ ist. Also ist es eine Eigenfunktion des Laplace-Operators mit Eigenwert 0.

Wir behaputen, dass die Verbindung zwischen der Vielfachheit von 0 als Eigenwert des Laplace-Operators und dem Zusammenhang von G wie folgt ist:

Proposition. *Wenn G genau k Zusammenhangskomponenten hat, so hat* 0 *Vielfachheit k als Eigenwert des Laplace-Operators von G.*

Beweis. Schreibe $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ für die Zusammenhangskomponenten des Graphen G. Für $j \in \{1, \ldots, k\}$ und sei $\mathbf{1}_{\Omega_j}(x) \in \mathbb{R}^V$ die charakteristische Funktion von Ω_j. Da die Zusammenhangskomponenten jeweils leeren Schnitt haben, lässt sich leicht zeigen, dass diese Funktionen eine lineare Teilmenge von $\mathbb{R}^V$

sind. Wir zeigen nun, dass jedes $\mathbf{1}_{\Omega_j}(x)$ eine Eigenfunktion von $T^* \circ T$ mit Eigenwert 0 ist. Es gilt

$$(T^* \circ T)(\mathbf{1}_{\Omega_j})(x) = -2d\mathbf{1}_{\Omega_j}(x) - 2 \sum_{w \in N(x)} \mathbf{1}_{\Omega_j}(w).$$

Wenn $x \in \Omega_j$ gilt, verschwindet dies da Nachbarn in der selben Zusammenhangskomponente enthalten sind. Andererseits verschwinden für $x \notin \Omega_j$ beide Terme auf der rechten Seite aus dem gleichen Grund. Also ist $(T^* \circ T)(\mathbf{1}_{\Omega_j})(x) = 0$ für alle $x \in V$. Dies zeigt, dass die Vielfachheit von0 mindestens k ist.

Nehme nun an, dass $f \in \mathbb{R}^V$ nicht von $\{\Omega_j \mid j \in \{1, \ldots, k\}\}$ augespannt würde; nehme also an,d ass f auf keinem der Zusammenhangskomponenten von G konstant, aber eine Eigenfunktion $T^* \circ T$ mit Eigenwert 0 ist. Dann wäre

$$0 = \langle (T^* \circ T)(f), f \rangle_V = \langle Tf, Tf \rangle_E = \sum_{e \in E} (Tf(e))^2 = \sum_{e \in E} (f(e^{(2)}) - f(e^{(1)}))^2.$$

Dies implizierte $f(e^{(2)}) - f(e^{(1)}) = 0$, $\forall e \in E$, also wäre f konstant auf den Endpunkten jeder Kante von G. Dies bedeutet f, dass f konstant auf den Zusammenhangskomponenten von G wäre, ein Widerspruch. □