Musterlösung Serie 25

Isometrien, Tensorprodukt

1. Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeige, dass A orthogonal und $\det A = 1$ ist.

   (b) Bestimme die Drehachse und den Drehwinkel von $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto Av$.

Lösung:

(a) Durch direktes Ausrechnen zeigt man $A^T A = I_3$ und $\det A = 1$.

(b) Nach dem Satz vom Fussball ist die Abbildung L_A eine Drehung. Die Drehachse ist enthalten im Eigenraum von A zum Eigenwert 1, den wir bestimmen als

$$\mathrm{Eig}_{1,A} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Weiter existiert eine geordnete Orthonormalbasis B mit

$${}_B[A]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

für einen Drehwinkel $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Es folgt

$$1 + 2\cos\varphi \;=\; \mathrm{Spur}\ {}_B[A]_B \;=\; \mathrm{Spur}\ A \;=\; -\frac{2}{3},$$

also

$$\varphi \;=\; \arccos(-5/6) \;=\; \pi - \arccos(5/6) \;\approx\; 146.44^\circ.$$

Aliter: Nachdem die Rotationsachse bestimmt wurde, bestimme einen dazu orthogonalen Vektor, zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sein Bild $w := Av$ ist also auch in der Ebene, welche orthogonal zur Rotationsache ist, enthalten. Wir können den Winkel φ berechnen durch

$$\varphi = \arccos(\cos(\varphi)) = \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}\right).$$

2. Zeige: Für jeden orthogonalen Endomorphismus f eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V gilt

$$|\operatorname{Tr}(f)| \leqslant n.$$

Für welche f gilt Gleichheit?

Lösung: Wir bemerken zunächst, dass $\operatorname{Tr}(f) = \operatorname{Tr}(A)$ für jede Darstellungsmatrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ von f bezüglich einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ gilt. Wir zeigen, dass A dann orthogonal ist, also $A^TA = I_n = AA^T$. Da für ein Paar $u, v \in V$ die Gleichung $\langle fu, fv\rangle = \langle u, v\rangle$ gilt, erhalten wir

$$(Au)^T M(Av) = u^T A^T M A v = u^T M v,$$

wobei M die Darstellungsmatrix des inneren Produkts bezüglich $\mathcal{B}$ ist. Da die vorherige Aussage für jedes Paar $u, v \in V$ gilt, erhalten wir

$$A^T M A = M.$$

Da $\mathcal{B}$ orthonormal ist, folgt $M = I_n$. Also ist $A^TA = I_n$. Wir schliessen, dass die Spalten von A eine Orthonormalbasis von V bilden. Insbesondere hat jeder Diagonaleintrag a_{ii} von A Norm kleinergleich 1. Daraus folgt

$$\operatorname{Tr}(f) = \operatorname{Tr}(A) \leqslant n.$$

Gleichheit gilt genau dann wenn jeder Diagonaleintrag Norm 1 hat und wenn alle diese Einträge das selbe Vorzeichen haben, also wenn $A = \pm I_n$ ist. Tatsächlcih ist f in diesen Fällen $\pm$ die Identität.

Aliter: Nach dem Spektralsatz existiert eine geordnete Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Darstellungsmatrix von f bezüglich $\mathcal{B}$ die Form

$$[M_f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_r \end{pmatrix}$$

hat, wobei D_k gleich ± 1 oder gleich $\left(\begin{smallmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{smallmatrix}\right)$ ist mit $a_k^2 + b_k^2 = 1$.

Im ersten Fall gilt $|\operatorname{Tr}(D_k)| = 1$ und im zweiten Fall $|\operatorname{Tr}(D_k)| = |2a_k| \leqslant 2$. Zusammen gilt daher

$$|\operatorname{Tr}(f)| = \Big|\sum_{k=1}^{r} \operatorname{Tr}(D_k)\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{r} |\operatorname{Tr}(D_k)| \leqslant n.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn für alle D_k vom zweiten Typ $|\operatorname{Tr}(D_k)| = 2$ gilt und wenn alle Diagonaleinträge von $[M_f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ das gleiche Vorzeichen besitzen. Dies ist genau dann der Fall, wenn $f = \pm\operatorname{id}_V$ ist.

Aliter ohne Spektralsatz: Sei $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine beliebige geordnete Orthonormalbasis von V. Für jedes $1 \leqslant j \leqslant n$ gilt dann

$$f(b_j) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, f(b_j)\rangle \cdot b_i.$$

Somit hat f die Darstellungsmatrix $[M_f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = (\langle b_i, f(b_j)\rangle)_{ij}$. Daraus folgt

$$\mathrm{Tr}(f) \;=\; \mathrm{Tr}([M_f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, f(b_i)\rangle.$$

Da f orthogonal ist, gilt für jedes i nun aber $\|b_i\| = \|f(b_i)\| = 1$. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung haben wir daher

$$|\langle b_i, f(b_i)\rangle| \leqslant \sqrt{\|b_i\|^2 \, \|f(b_j)\|^2} = 1.$$

Durch Aufsummieren folgt daraus $|\,\mathrm{Tr}(f)| \leqslant n$, wie gewünscht.

Ausserdem gilt $|\,\mathrm{Tr}(f)| = n$ genau dann, wenn die reellen Zahlen $\langle b_i, f(b_i)\rangle$ alle gleich 1 oder alle gleich -1 sind. In diesem Fall haben wir für jedes i auch Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, und daher ist $f(b_i)$ linear abhängig von b_i. Somit ist $f(b_i) = b_i$ für alle i, oder $f(b_i) = -b_i$ für alle i, also $f = \pm\,\mathrm{id}_V$.

3. Betrachten Sie zwei zweidimensionale Teilräume $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$. Beschreiben Sie die Menge der Elemente $T \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, so dass

$$TE_1 = E_2$$

gilt, in Bezug auf orthogonale Basen von E_1 und E_2.

Hinweis: Gehen Sie zunächst davon aus, dass $E_1 = E_2 = \mathrm{Sp}(e_1, e_2)$ ist.

Solution: Zunächst bestimmen wir zwei Orthonormalbasen v_1, v_2, v_3 und w_1, w_2, w_3 von $\mathbb{R}^3$ mit $v_1, v_2 \in E_1$ und $w_1, w_2 \in E_2$. Dies liefert orthogonale Matrizen $M_1 := (v_1 v_2 v_3)$ und $M_2 := (w_1 w_2 w_3)$. Diese haben Determinante ± 1 , und nach etwaigem Ersetzen von v_3 durch $-v_3$, beziehungsweise von w_3 durch $-w_3$, können wir erreichen, dass $\det(M_1) = \det(M_2) = 1$ ist.

Sodann erinnern wir uns daran, dass die Drehungen von $\mathbb{R}^3$ die Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ aller orthogonalen Matrizen mit Determinante 1 bilden. Insbesondere ist jede Komposition von Drehungen und die Inverse jeder Drehung wieder eine Drehung, und nach Konstruktion sind M_1 und M_2 Drehungen.

Sei nun E_0 der von den Standardbasisvektoren e_1, e_2 aufgespannte Unterraum. Nach Konstruktion gilt dann $M_1E_0 = E_1$ und $M_2E_0 = E_2$. Für eine beliebige Drehung T gilt dann

$$TE_1 = E_2 \Longleftrightarrow TM_1E_0 = M_2E_0 \quad \Longleftrightarrow \quad M_2^{-1}TM_1E_0 = E_0.$$

Also ist $D := M_2^{-1}TM_1$ eine Drehung mit $DE_0 = E_0$, und $T = M_2DM_1^{-1}$. Es bleibt daher, alle Drehungen D mit $DE_0 = E_0$ zu bestimmen. Eine solche Drehung muss auch das orthogonale Komplement von E_0 in sich abbilden. Dieses ist von dem Standardbasisvektor e_3 erzeugt. Wegen $\|De_3\| = \|e_3\| = 1$ muss dann $De_3 = \pm e_3$ sein.

Im Fall $De_3 = e_3$ ist D eine Drehung um die Achse $\mathbb{R}e_3$, und alle solchen sind gegeben durch die Matrizen

$$D_\varphi := \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für $(a, b) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$. Sodann ist

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Drehung mit $SE_0 = E_0$ und $Se_3 = -e_3$. Im Fall $De_3 = -e_3$ ist daher $S^{-1}D$ eine Drehung mit $S^{-1}DE_0 = E_0$ und $S^{-1}De_3 = e_3$. Somit ist $S^{-1}D = D_\varphi$ für ein φ und damit $D = SD_\varphi$. Die Menge aller Drehungen D mit $DE_0 = E_0$ ist daher

$$\{D_\varphi \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{SD_\varphi \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$$

Die Menge aller Drehungen T mit $TE_1 = E_2$ ist also schlussendlich

$$\left\{M_2D_\varphi M_1^{-1} \mid \varphi \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{M_2SD_\varphi M_1^{-1} \mid \varphi \in \mathbb{R}\right\}.$$

4. Angenommen, $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$ und $5, 7$ sind Eigenwerte von T. Beweisen Sie, dass $T_\mathbb{C}$ keine nicht-reellen Eigenwerte hat.

   Lösung: Da $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$, hat das Polynom $\chi_T(x) = \chi_{T_\mathbb{C}}(x)$ reelle Koeffizienten. Daher, wenn T einen weiteren nicht-reellen Eigenwert λ hätte, wäre $\overline{\lambda} \neq \lambda$ auch ein Eigenwert von $T_\mathbb{C}$. Somit hätte $T_\mathbb{C}$ 4 Eigenwerte. Aber $\dim_\mathbb{C}((\mathbb{R}^3)_\mathbb{C}) = 3$, was zu einem Widerspruch führt.

5. Sei $S_1 = \{1, x, 2x, x^2, \ldots, x^k\}$ und $S_2 = \{1, x, x^2, \ldots, x^k\}$. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $K(S_1)$ nicht isomorph zu $K(S_2)$ ist.

   Lösung: Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\dim_K(K(S_1)) = |S_1| = k + 2$ und $\dim_K(K(S_2)) = |S_2| = k + 1$. Daher können diese beiden Vektorräume nicht isomorph sein.

6. Vereinfache den folgenden Ausdruck in $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$.

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir drücken jeweils den ersten Faktor als Linearkombination der Standardbasisvektoren $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ aus, benutzen die Linearität des Tensorprodukts in der ersten Variablen, und fassen dann alle Terme mit demselben ersten Faktor zusammen unter Benutzung der Linearität des Tensorprodukts in der zweiten Variablen. Wir rechnen also

$$\begin{aligned} -\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} &= \left((-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \otimes \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-6\\2\\-4\end{pmatrix} \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \\ 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für den gewünschten Ausdruck erhalten wir somit

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-6\\2\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} \\ = \quad & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} \right) \\ & + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix}-6\\2\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} \right) \\ = \quad & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Zeige

$$V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V, W).$$

Solution: Definiere die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \quad V^* \times W &\to \qquad \mathrm{Hom}(V, W) \\ (\ell, w) &\mapsto \quad (\varphi_{(\ell,w)} : v \mapsto \ell(v)w) \end{aligned}$$

Nach den Regeln der Addition und Skalarmultiplikation für lineare Funktionale und lineare Abbildungen folgt, dass diese Abbildung bilinear ist (Nachrechnen!). Also existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\eta : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$, sodass das Diagram

$$\begin{tikzcd} V^* \times W \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "\varphi"] & V^* \otimes W \arrow[d, "\eta"] \\ & \mathrm{Hom}(V, W) \end{tikzcd}$$

kommutiert. In anderen Worten gilt für beliebige $\ell \in V^*$, $w \in W$

$$\eta(\ell \otimes w) = \varphi_{(\ell,w)}.$$

Zuerst zeigen wir, dass diese Abbildung surjektiv ist. Seien $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von V und sei $\mathcal{B}^*$ die korrespondierende Dualbasis. Betrachte $\{w_i := L(e_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset W$. Jetzt gilt für $v \in V$

$$\eta\left(\sum_{i=1}^n e_i^* \otimes w_i\right)(v) = \sum_{i=1}^n \varphi_{(e_i^*, w_i)}\left(\sum_{j=1}^n e_j^*(v) e_j\right) = \sum_{i=1}^n e_i^*(v) L(e_i) = L(v).$$

Also ist η surjektiv.

Als nächstes zeigen wir die Injektivität von η. Sei $\mathcal{C} = \{f_j\}_{j=1}^m$ eine Basis von W. Nehme an, dass

$$\eta\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}(e_i^* \otimes f_j)\right) = \eta\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(e_i^* \otimes f_j)\right).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \forall v \in V : \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} e_i^*(v) f_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij} e_i^*(v) f_j \\ \Leftrightarrow \forall v \in V,\ \forall 1 \leqslant j \leqslant m : \quad & \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i^*(v) = \sum_{i=1}^n \beta_{ij} e_i^*(v) \\ \Leftrightarrow \forall 1 \leqslant j \leqslant m : \quad & \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i^* = \sum_{i=1}^n \beta_{ij} e_i^* \\ \Leftrightarrow \forall 1 \leqslant j \leqslant m,\ \forall 1 \leqslant i \leqslant n : \quad & \alpha_{ij} = \beta_{ij}, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}(e_i^*\otimes f_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}(e_i^*\otimes f_j).$$

Also ist η injektiv, und damit sind wir fertig.